

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES

PAR

Jacques LIEUTAUD

PREMIERE THESE

APPROXIMATION D'OPERATEURS

PAR DES METHODES DE DECOMPOSITION

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

Théorie des résidus sur une variété analytique complexe

Soutenues le 27 Mars 1969 devant la Commission d'Examen

M.M. J.L. LIONS

Président

P. LELONG

BAOUENDI

NORGUET

Examineurs

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES

PAR

Jacques LIEUTAUD

PREMIERE THESE

APPROXIMATION D'OPERATEURS
PAR DES METHODES DE DECOMPOSITION

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

Théorie des résidus sur une variété analytique complexe

Soutenues le 27 Mars 1969 devant la Commission d'Examen

M.M. J.L. LIONS

Président

P. LELONG

BAOUENDI

NORGUET

Examineurs

THESES

UNIVERSITY

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITE DE PARIS

LE GOUVERNEMENT FRANÇAIS



UNIVERSITE DE PARIS

FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

PROFESSEURS

ANVIER 1967

Le Doyen M. ZAMANSKY

RASSE	T Evolution des êtres organisés	Melle CAUCHOIS	T Chimie Physique
REVOST	T Chimie Organique	THELLIER	T Physique du Globe
YART	T Minéralogie & Cristallographie	PONCIN	T Mécanique générale
ESSIER	T Zoologie	DUBREIL	T Arithmétique & Théories des nombres
UGER	T Physique quantique & relativité		
ONNIER	T Physiologie générale		
IVETEAU	T Paléontologie	CAGNIARD	T Géophysique appliquée
OCARD	T Physique E.N.S.	CHAMPETIER	T Chimie macromo- léculaire
ARTAN	T Mathématiques E.N.S	CUVILLIER	T Micropaléonto- logie
AFITTE	T Chimie générale		
.....	T Géométrie supérieure	TRILLAT	Microscopie & diffraction électronique
OULOMB	T Physique du globe	WIEMANN	T Chimie organi- que & Structu- rale
		VASSY	T Physique de l'atmosphère
HRETIEN	T Chimie minérale	DESTOUCHES	T Théorie physi- que
OCQUET	T Zoologie	AMIEL	T Chimie géné- rale
ASTLER	T Physique E.N.S.		
PHRUSSI	T Génétique	J.P. MATHIEU	T Physique opti- que
AUTHERET	T Biologie végétale CPEM	COUTEAUX	T Cytologie
UCAS R.	Recherches physiques	CHOQUET	T Théorie des fonctions & topologie
HOMAS A.T.	Biologie	FELDMANN	T Biologie végé- tale marine

.../...

BRAND	T Physique enseignement	JOST	T Physiologie comparée
DELEILLET	T Physique CPEM	FORTET	T Calcul des probabilités & physique mathématiques
DORTIER	T Mécanique expérimentale des Fluides	SCHWARTZ	T Calcul différentiel & intégral
DURACH	T Biologie maritime	CHOUARD	T Physiologie végétale
DUENEY	T Météorologie & dynamique de l'atmosphère	MALAVARD	T Aviation (technique aéronautique)
DALLIEN	T Embryologie	BRELOT	T Analyse supérieure
DICHHORN	T Botanique	NORMANT	T Synthèse organique
DENARD	T Chimie appliquée	YVON	T Théories physiques
DUGUE	T Statistique mathématique	COTTE	T Physique électricité
DOULAIRAC	T Psychophysiologie	DUBOIS J.E.	T Chimie organique physique
DURICH	T Physiologie végétale appliquée	LAMOTTE	T Zoologie E.N.S.
DURMANN	T Théories chimiques	OLMER	T Energétique générale
HADEFFAUD	T Botanique	GAUTHIER	T Mécanique appliquée
Mlle LE BRETON	T Physiologie de la nutrition	BARCHEWITZ	T Chimie physique
DELONG	T Application de l'analyse à la géométrie	BROSSEL	T Physique atomique
DEVILLERS	T Anatomie comparée	BUSER	T Physiologie comparée
DHRESMANN	T Topologie algébrique	CAMUS	T Physiologie végétale
DURANCON	T Physique SPCN	CURIEN	T Minéralogie & cristallographie
DANGEAUD	T Géographie physique-géologie dynamique	POSSOMPES	T Zoologie
DEMENT	T Mathématiques MGP	PULLMANN	T Chimie quantique
DESOT	T Technique mathématiques de la physique	TEILLAC	T Physique nucléaire & radioactivité
DURCH	T Géologie	VILLE	T Econométrie
DATZMANN	T Astrophysique	FREYNANN	T Recherches physiques
DURMIER	T Géologie générale	ROLLET	T Chimie minérale
DUMANSKY	T Mathématiques générales	Mlle JOSIEN	T Chimie SPCN
DUMNULER	T Physique M.G.P.	CHEVALLEY	T Géométrie algébriques & théorie des groupes
DUTHIER	T Géologie appliquée	GERMAIN	T Mécan. Théo. des fluides
Mlle TONNELAT	T Physique théorique	LUCAS G.	T Géologie
		ALLARD	T Chimie Physique



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552216_0004

KMIER	T Mathématiques M.P.C.	BERTHELOT	T Physique des particules fondamentales
UCHAY	T Chimie générale	BRICARD	T Météorologie
GRAN	T Electrotechnique	Mme ALBE-FESSARD	T Psycho-physiologie
USSET	T Chimie systématique		
WY	T Physique théorique des hautes énergies	M. JULIA	T Etude des molécules naturelles complexes
CHAIX	T Chimie biologique	MAGAT	T Physico-chimie des rayonnements
HUREL	PY T Biologie végétale CPEM		
NNETIER	T Chimie générale I	MONOD	T Chimie de métabolisme
UN	T Mécanique des fluides I	DE POSSEL	T Analyse numérique
DUBREIL	T Mathématiques (Agragation)	CHARLOT	T Chimie analytique
LELONG	T Mathématiques II E.N.S.	CHATELET	T Chimie CPEM
LLAIR	T Géologie S.P.C.N.	MATTLER	T Physique SPCN
USSIÈRES	T Radiochimie	AUBOIN	T Géologie
COUTURE	T Thermodynamique	Mme BENOIT-GUEUTAL	T Physique Nucléaire & Radioactivité
ANC	Biologie animale CPEM	BOUGIS	Biologie végétale marine Villefranche s/ Mer
ENELL	T Botanique tropicale		
OLKOWSKI	T Physiologie générale	RIGAUDY	T Chimie SPCN
HER	T Chimie biologique	COLLONGUES	T Chimie appliquée
UDOIN	T Biologie animale CPEM	DUBERT	Biochimie
AUMONT	Biologie animale SPCN	NOZIERES	T Physique fondamentale
AMONT	Géophysique ionosphère	CADIOT	Chimie organique
UREAU	T Botanique	IVANOFF	T Océanographie physique
RIE D.	Physique MGP	FRANCOIS	Zoologie
RAND DELGA	T Géologie	TALBOT	Génie chimique
LLER	T Physiologie végétale	Mme NOUGAREDE	Botanique
RTRAT	T Calcul des probabilités	BRUHAT	T Mathématique MPC
ILLEUX	T Géologie SPCN	FORNET	Electricité générale
GNAN	T Physique électricité	DEHEUVELS	T Mathématiques fondamentales
UDEL	T Mécanique ondulatoire	FURON	T Géologie SPCN
CHOQUET	T Mécanique analytique & mécanique céleste	Mme GANS	T Génétique

		GENEVES	Biologie végétale CPEM
		HUPE	T Pétrographie
le VEIL	T Physiologie générale	HOLLANDE	T Biologie générale
OFF	T Microbiologie	LIONS	T Analyse numérique
ESTRUNCK	T Mécan.Phys. & expérimentale	MAITTE	T Chimie organique
BANNES	T Mécanique théorique	NICOLAS	Géologie appliquée
IRE	T Géographie physique & géo- logie dynamique	PANIGEL	Biologie générale
MOLET	T Mécanique des fluides	RAVIER	T Pétrographie
LLOUE	T Physique de l'exosphère	MOREL F	T Physiologie compa- rée
UILLON	T Biologie animale	ROSEAU	T Mécanique théorique des fluides
IVIER	T Anthropologie	ROUBINE	T Electronique E.S.E.
MUEL	T Mathématiques (ENS Jeunes filles)	SILBER	T Chimie CPEM
IRY	T Mécanique céleste	UEBERSFELD	T Electronique
ELES	T Physique SPCN	HERVE	T Mathématiques
AT	T Thermodynamique	Mme PECKER-WIMEL	T Astrophysique
ALKANSKI	Physique M.P.C.1	TAVERNIER	Physique PC
CORRE	T Electricité	DURAND Michel	Biologie animale SPCN
TAF	T Physique nucléaire & Radio activé	Mme PETIT	Biologie animale CPEM
HALIER	Biologie animale CPEM	CAGNAC	Electricité
RRAUD	T Physique CPEM	FALK-VAIRANT	Physique nucléaire
RS	Géologie structurale & appli- quée	KRASNER	T Mathématiques
MEFORT	Botanique (agrégation)	BENZECRI	T Statistiques
CHNIEWSKY	T Mécanique industrielle	VINH MAU	Physique M.G.P.
GWALT	Chimie SPCN	DUQUESNES	Physique CPEM
AQUIERE	Automatique	SCHUTZENBERGER	T Programmation
RUCH	Physique propédeutique	TREMILLON	Chimie MPC
NOUS	T Physique théorique	FAYZRD	Chimie MPC
ONINSKI	Génétique	BUVET	Chimie CPEM
LLIAVIN	T Mathématiques propédeutique	AUTHIER	Minéralogie et Cristal- lographie
UDEMAR	Chimie propédeutique		
OUSSE	T Mécanique théorique	BONNEFILLE	Electronique
SCH	T astronomie	Mme PUISEUX DAO	Biologie végét.
Y	T Physique expérimentale	BERGER	T Géométrie supér.
ZARD	T Mathématiques MPC	Melle LIBERMANN	T Mathématiques

EL P.	Physique MPC
AC	Programmation
EBVRE	T Chimie MPC
	Physique fondamentale
PEVILLE	Biochimie
TOIT	Physique CPEM
	Chimie CPEM
ZEIN	Géologie ENS
EVOST G.	Biologie cellulaire
WARD P.	Biologie animale CPEM
e CHARNIAUX-COTTON	Evolution des êtres organisés
le FICINI	Chimie CPEM
QUEUX	Astronomie
HEN TANNOUDJI	Physique atomique

DEDONDER	T Biologie cellulaire
DUFOUR	T Electronique I.U.T.
SCHAAL	Chimie CPEM
BAUCHOT	Anatomie comparée
LANCE	BV CPEM
GIRAUD	Botanique E.N.S.
HULIN	Physique P C
VIGIER	Génétique
GUERN	Biologie végétale
SLODZIAN	Physique CPEM
LACOMBE	Logique mathématique
TAVLITZKI	Biologie cellulaire
ARVIEU	Physique CPEM
TAXI	B.A. CPEM
COLLENOT	B.A. CPEM
BASSELIER	Chimie propédeutique
BADOUAL	Electronique I.U.T.

Le SECRETAIRE GENERAL,

R. POUILLAIN

APPROXIMATION D'OPERATEURS

PAR DES METHODES DE DECOMPOSITION

INTRODUCTION :

Dans ce travail, nous étudions d'un point de vue mathématique, certaines méthodes d'approximation de solutions d'équations aux dérivées partielles, qui utilisent la propriété des opérateurs, fréquente en pratique, de s'écrire comme somme d'opérateurs "plus simples".

Nous nous intéressons particulièrement à des problèmes d'évolution de la forme :

$$\frac{du}{dt} + Au = f \quad u(0) \text{ donné,}$$

où A est un opérateur elliptique de type variationnel, à coefficients dépendant du temps. Le problème modèle est donné par la diffusion de la chaleur dans un corps :

$$\frac{du}{dt} - \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{d^2u}{dy^2} = f$$

avec des conditions aux limites appropriées.

L'approximation des opérateurs elliptiques par la méthode des différences finies est couramment utilisée ; le formalisme en est développé dans [1] ; il conduit à définir une famille d'opérateurs A_h sur des espaces de dimension finie, qui approchent l'opérateur A lorsque le pas de maillage, h, tend vers zéro. Dans le chapitre I, nous rappelons brièvement cette construction et les principaux résultats.

L'approximation des problèmes d'évolution par la méthode des différences finies et l'usage de la méthode d'énergie pour l'obtention de conditions de stabilité et de démonstrations de convergence ont été développés dans [2]. Au chapitre II, nous rappelons les principaux résultats et nous les complétons par des théorèmes de convergence qui semblent "les meilleurs possible".

Les méthodes classiques des différences finies introduisent deux catégories d'approximation : les unes "explicites" qui conduisent à une solution approchée donnée par :

$$\frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} + A_h u(t) = f(t) ;$$

les autres "implicites" qui demandent de trouver une solution approchée vérifiant :

$$\frac{u(t) - u(t-\Delta t)}{\Delta t} + A_h u(t) = f(t) .$$

La méthode explicite est facile à traiter numériquement, mais elle impose,

du maillage h ; cette condition est souvent gênante et coûteuse. La méthode implicite conduit à résoudre à chaque intervalle de temps un système d'équations qui est l'approximation d'un problème elliptique ; ce problème numérique se traite bien lorsque l'opérateur différentiel A est un opérateur de dérivation dans une seule direction (par exemple $\frac{d^2}{dx^2}$ ou $\frac{d^2}{dy^2}$) ; en général cependant, c'est un problème si coûteux qu'il interdit l'usage de ces méthodes.

Depuis quelques années se sont développées des méthodes "semi-implicites" dont voici deux exemples : on suppose que notre opérateur elliptique s'écrit :

$$A = A_1 + A_2$$

A_1 et A_2 étant des opérateurs différentiels en x et y respectivement, on approche A_1 et A_2 par la méthode des différences finies et on considère l'approximation de la solution définie par :

$$\frac{\hat{u}(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} + A_{1h} \hat{u}(t+\Delta t) + D A_{2h} u(t) = f(t)$$

$$\frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} + A_{1h} \hat{u}(t+\Delta t) + A_{2h} u(t+\Delta t) = f(t) .$$

Le cas $D = 0$ correspond à la méthode des "pas fractionnaires" et le cas $D = 1$ à la méthode des "directions alternées". Dans l'un et l'autre cas, on est conduit à résoudre, à chaque intervalle de temps, deux problèmes elliptiques discrets, correspondant aux opérateurs "plus simples" A_1 et A_2 , ce qui ne présente pas de difficulté.

La méthode des "pas fractionnaires" est étudiée d'un point de vue différent dans [8]. Nous avons, au chapitre III, considéré ces méthodes d'approximations comme apparentées aux méthodes "prédiction-correction" bien connues en approximation des équations différentielles ordinaires et nous avons montré qu'elles pouvaient s'interpréter comme des méthodes implicites (classiques) perturbées :

$$\frac{u(t) - u(t-\Delta t)}{\Delta t} + A_h u(t) + P_h u(t) + Q_h u(t-\Delta t) = f(t)$$

Nous justifions le mot "perturbation" en montrant que si les solutions approchées ainsi construites sont stables, les termes de perturbation tendent vers zéro (avec le pas de discrétisation) : c'est ce qu'on appelle la "consistance" des approximations.

Ainsi, l'étude de la convergence des approximations se trouve réduite à l'étude de la stabilité, qui s'obtient par la méthode d'énergie. Nous traitons plusieurs variantes de la méthode des pas fractionnaires, de celle des directions alternées (sans l'étendre cependant à plus de deux directions) et notre point de vue permet d'envisager d'autres décompositions.

Au chapitre IV nous reprenons les idées et les méthodes développées aux chapitres II et III en les adaptant aux problèmes d'évolution du deuxième ordre :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + Au = f$$

dont le modèle est donné par l'équation des membranes vibrantes :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 .$$

Les idées sont les mêmes, mais la méthode d'énergie est nettement différente et d'un maniement plus délicat que dans les problèmes paraboliques.

Au chapitre V, nous étudions la résolution approchée d'une équation :

$$A_1 u + A_2 u = f$$

par la méthode itérative :

$$u_{n+\frac{1}{2}} - u_n + A_1 u_{n+\frac{1}{2}} + A_2 u_n = f$$

$$u_{n+1} - u_n + A_1 u_{n+\frac{1}{2}} + A_2 u_{n+1} = f .$$

La convergence de cette méthode, connue sous le nom de "méthode des directions alternées", est classique dans le cas de la dimension finie, A_1 et A_2 étant des matrices symétriques définies positives. En nous appuyant sur une égalité d'énergie, nous en donnons une démonstration qui permet d'assouplir considérablement les hypothèses et d'envisager par exemple certains opérateurs non linéaires ou des problèmes en dimension infinie.

Je tiens à exprimer à Monsieur LIONS ma profonde gratitude pour m'avoir suggéré ce travail et m'avoir permis, par ses conseils patients, de le mener à bout.

Je remercie également Monsieur LELONG et Monsieur TEMAM d'avoir accepté de faire partie du jury.

Ce travail n'aurait pas vu le jour sans les encouragements confiants de Monsieur AMOUYAL, Chef du Département de Calcul Electronique au Commissariat à l'Energie Atomique, qui m'a apporté toutes facilités pour le mener à bien ; qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Je ne veux pas omettre de remercier aussi tous ceux qui, du jour où fut terminé le travail mathématique proprement dit, m'ont permis, par leur aide patiente, d'en voir la conclusion.

TABLE DES MATIERES

		Page
CHAPITRE I	- PROBLEMES ELLIPTIQUES LINEAIRES	1
1	Forme variationnelle	2
2	Approximation	3
3	Exemples	4
4	Compléments	5
5	Récapitulation	9
CHAPITRE II	- PROBLEMES PARABOLIQUES LINEAIRES(I)	11
1	Formulation du problème	12
2	Approximation	13
3	Stabilité	14
4	Convergence faible	17
5	Convergence forte	18
6	Formes hermitiennes	22
CHAPITRE III	- PROBLEMES PARABOLIQUES LINEAIRES(II)	27
1	Une classe de schémas	28
2	Résultats généraux	37
3	Méthode des pas fractionnaires	44
4	Méthode des directions alternées	64
5	Méthode à perturbations positives	75
CHAPITRE IV	- PROBLEMES LINEAIRES DU DEUXIEME ORDRE EN t	86
1	Approximation classique	86
2	Schémas du type "pas fractionnaires"	99

CHAPITRE V	- DIRECTIONS ALTERNÉES ET OPÉRATEURS MONOTONES	119
1	Cas stationnaire linéaire	119
2	Cas stationnaire monotone	121
3	Problèmes paraboliques monotones	127
BIBLIOGRAPHIE		140

Chapitre I -

PROBLEMES ELLIPTIQUES LINEAIRES

Ce chapitre est destiné à introduire les outils (notations et hypothèses) de l'approximation des problèmes elliptiques linéaires à l'aide desquels on approchera ultérieurement les problèmes d'évolution.

I FORME VARIATIONNELLE

On formule le problème classique avec des notations un peu particulières que l'on illustre brièvement par le cas de problèmes aux dérivées partielles du second ordre.

II APPROXIMATION

On énonce les hypothèses d'approximation (consistance) et le théorème de convergence.

III EXEMPLES.

IV Compléments

Les hypothèses générales du paragraphe II sont insuffisantes pour la suite ; on les complète, ainsi que les notations, pour définir le cadre des chapitres suivants.

V RECAPITULATION

des données et notations qui seront utilisées par la suite.

I - FORME GENERALE VARIATIONNELLE

Théorème 1-1 Soit V un espace de Hilbert^(*); $a(u, v)$ une forme sesquilinéaire coercive sur V :

$$(1-1) \quad \begin{cases} |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \\ \operatorname{Re} a(u, u) \geq \alpha \|u\|_V^2 \quad (\alpha > 0) \end{cases}$$

Soit $L(v)$ une forme antilinéaire continue sur V ;
alors le problème

$$(1-2) \quad u \in V \text{ et } a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

a une solution unique.

Exemple 1-1 Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^p$, soit V un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$

$$H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega);$$

On se donne des fonctions $a_{ij}(x)$ et $a_0(x)$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{ij}(x) \text{ et } a_0(x) \in L^\infty(\Omega) \text{ pour } 1 \leq i, j \leq p \\ \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_j \bar{\xi}_i \geq \alpha \sum_i |\xi_i|^2, \quad \forall \xi_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, p \\ a_0(x) \geq \alpha > 0 \end{array} \right.$$

et on leur associe la forme coercive

$$(1-4) \quad \int \left\{ \sum_{i,j} a_{ij}(x) D_j u(x) D_i \bar{v}(x) + a_0(x) u(x) \bar{v}(x) \right\} dx.$$

Alors, si f est une fonction de $L^2(\Omega)$, la forme

$$(1-5) \quad \int f(x) \bar{v}(x) dx$$

est continue sur V et le problème associé est un problème aux dérivées partielles elliptique, les conditions aux limites étant caractérisées par le choix de V .

(*) tous les espaces de Hilbert seront supposés complexes et séparables.

Pour la suite nous aurons besoin de poser le problème du théorème 1-1 d'une façon légèrement différente :

Problème 1.1. Soit X un espace de Hilbert et $a(u,v)$ une forme coercive sur X (cf (1.1)) ; soit $L(v)$ une forme antilinéaire continue sur X et V un sous-espace de Hilbert de X . Résoudre

$$(1-6) \quad u \in V \text{ et } a(u,v) = L(v) \quad \forall v \in V$$

Bien entendu le problème est identique au précédent.

Exemple 1.2. Reprenons les données de l'exemple 1.1; nous prenons pour X l'espace $[L^2(\Omega)]^{p+1}$; si u et v appartiennent à X , $u = (u_0, u_1, \dots, u_p)$ nous posons

$$(1.7) \quad a(u,v) = \int_{\Omega} \left\{ \sum_{i,j} a_{ij}(x) u_j(x) \bar{v}_i(x) + a_0(x) u_0(x) \bar{v}_0(x) \right\} dx$$

(et V est naturellement plongé dans X par

$$(1.8) \quad u \rightarrow (u, D_1 u, \dots, D_p u)$$

II Approximation du problème 1.1.

Soit h un paramètre "tendant vers zéro" (pour être précis, il faudrait parler de filtre et de convergence suivant le filtre). On caractérise l'approximation par une famille d'application q_h vérifiant les propriétés suivantes

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_h : V \rightarrow X \text{ linéaire} \\ q_h V \text{ sous-espace de dimension finie de } X \\ \|q_h v\| \leq M \|v\| \quad \forall h, \forall v \in V \\ q_h v \rightarrow v \quad (h \rightarrow 0) \quad \forall v \in V \end{array} \right.$$

On démontre (cf. CEA [1])

Théorème 2.1.

- 1° - Le problème "approché"
- (2-2) $u_h \in q_h V$ et $a(u_h, q_h v) = L(q_h v), \forall v \in V$
a une solution unique
- 2°) L'ensemble des solutions approchées est borné dans X
- 3°) Sous l'hypothèse
- (2-3) $u_h \in q_h V$ et $u_h \rightarrow u$ dans X faible $\Rightarrow u \in V$
la solution approchée u_h converge faiblement dans X vers la solution du problème 1.1.
- 4°) La solution approchée converge fortement dans X

Remarque 2.1 Les hypothèses (2-1) (2-3) pourront être appelées "Hypothèse de consistance".

Remarque 2.2 Si $X = V$ on dit que l'on a une approximation interne et si $X \neq V$, une approximation externe.

III EXEMPLES

Pour ne pas alourdir le texte dans ce paragraphe nous restons dans une certaine imprécision, en renvoyant à CEA [1] pour un exposé détaillé complet. Ω étant un ouvert régulier, reprenons l'exemple 1.2; on définit un réseau de maille $h = (h_1, \dots, h_p)$.

Cas de $V = H^1(\Omega)$

Etant donnée une fonction u de $H^1(\Omega)$, on lui associe la fonction étagée u_h obtenue sur les pavés intérieurs à Ω en prenant la moyenne de u ; l'expression

$$(3-1) \quad \nabla_{h_i} u_h(x) = \frac{1}{h_i} [u_h(x+h_i) - u_h(x)]$$

est définie sur certains pavés et on prolonge toutes les fonctions ainsi obtenues par zéro; on pose

$$(3-2) \quad q_h u = (u_h, \nabla_{h_1} u_h, \dots, \nabla_{h_p} u_h)$$

Cas de $H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$

V est le sous-espace de $H^1(\Omega)$ formé des fonctions nulles sur un morceau (fermé) Γ de la frontière de Ω . On définit maintenant la fonction u_h comme précédemment, mais en étendant son domaine de définition aux pavés rencontrant Γ , où on lui donne la valeur zéro; on définit $\nabla_{h_i} u_h$ par (3.1) et on prolonge encore toutes les fonctions par zéro obtenant ainsi $q_h u$.

IV COMPLEMENTS

Nous aurons besoin, pour la suite, de particulariser les données des paragraphes précédents.

1° - On se donne sur X une forme hermitienne continue non négative, notée (u, v) dont la semi-norme correspondante, $|u|$, est une norme sur V ; on appelle H le complété de V pour cette norme.

.../...

On démontre :

Proposition 4.1 - La forme $a(u, v)$, donnée en (1.1), définit sur H un opérateur linéaire fermé, de domaine dense, A , vérifiant

$$(4.1) \quad (Au, v) = a(u, v) \quad \forall u, v \in V$$

Remarque - Si la forme $L(v)$ est définie par un élément f de H ,

$$(4.2) \quad L(v) = (f, v)$$

le problème (1.2) prend la forme opérationnelle

$$(4.3) \quad Au = f$$

Exemple - Dans le cas de l'exemple 1.2, on prend pour H l'espace $L_2(\Omega)$; le produit scalaire de H de deux fonctions u et v de X , $u = (u_0, u_1, \dots, u_p)$, est donné par

$$(4.4) \quad (u, v) = \int_{\Omega} u_0(x) \bar{v}_0(x) dx$$

Nous aurons besoin d'ajouter quelques hypothèses, dont la vérification est immédiate dans les exemples précédents, aux q_h du § II.

Hypothèse

$$(4.5.) \quad \begin{cases} |q_h u| = 0 \Rightarrow q_h u = 0 & \forall h, \forall u \in V \\ (u, q_h v) = (q_h u, q_h v) & \forall h, \forall u, v \in V \end{cases}$$

Remarque 4.1 La première hypothèse signifie que $|u|$ est une norme sur V_h et la seconde signifie que q_h est un projecteur orthogonal, pour (u, v) sur V_h .

Etant donné une forme sesquilinéaire $a(u, v)$ sur $X \times X$ et une forme antilinéaire $L(v)$ sur X , on définit un opérateur linéaire A_h sur V_h et un élément f_h de V_h par les équations.

$$(4.6) \quad (A_h u_h, v_h) = a(u_h, v_h)$$

$$(4.7) \quad (f_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall u_h, v_h \in V_h$$

le problème approché (2.2) s'écrit alors

$$(4.8) \quad A_h u_h = f_h$$

3° Nous allons démontrer deux propriétés de l'approximation dont nous nous servirons plus tard.

Lemme 4.1 Sous les hypothèses (2.1'), (2.3'), (4.5)

$$q_h v \rightarrow v \text{ dans } X \text{ faible } (*)$$

uniformément sur les bornés de V (pour la topologie de X)

Démonstration Si ce n'était pas vrai, il existerait une suite v_h , bornée dans V , telle que $q_h v_h - v_h$ ne tende pas vers zéro dans X faible. En utilisant l'équicontinuité (2.1')

des q_h et l'hypothèse (2.3'), on peut supposer que

$q_h v_h - v_h$ converge dans X faible vers un v appartenant à V ; soit alors w dans V ; (4.5) montre que

$$(4.9) \quad (q_h v_h - v_h, w) = (v_h, q_h w - w).$$

De la convergence forte (2.1) de $q_h w$ résulte

$$(4.10) \quad (v, w) = 0$$

donc v est nul.

(*) Nous ne préciserons pas, lorsqu'il n'y aura pas de confusion, la référence " $h \rightarrow 0$ ".

Proposition 4.2 -

$$(4.11) \quad A_h q_h u \rightarrow Au \text{ dans } V^* \text{ fort, } \forall u \in V$$

Remarque 4.2. - (4.11) nécessite quelques explications : les hypothèses faites montrent que V et V_h sont plongés dans H , qui, lorsqu'on l'identifie à son antidual, est plongé dans V^* alors (4.11) exprime que, pour u dans V ,

$$(4.12) \quad (A_h q_h u, v) \rightarrow a(u, v)$$

uniformément sur les bornés de V .

On sait que A est une application continue de V dans V^* ; ainsi la proposition 4.2 affirme que l'approximation $A_h q_h$ de A est "consistante".

Démonstration - De (4.5) résulte

$$(4.13) \quad (A_h q_h u, v) = a(q_h u, q_h v)$$

alors la convergence forte de $q_h u$ et le lemme 4.1. montrent la convergence uniforme de (4.13) vers $a(u, v)$ pour v borné dans V .

Lemme 4.2 Soit $\sigma(h)$, nombre positif tendant vers l'infini quand h tend vers zéro tel que

$$(4.14) \quad \|q_h u\| \leq \sigma(h) \|q_h u\| \quad \forall u \in V;$$

alors

$$\frac{1}{\sigma(h)} q_h v \rightarrow 0 \text{ dans } X \text{ faible}$$

uniformément pour les v de V bornés dans H .

Démonstration - (4.5) et (4.14) montrent que $\frac{1}{\sigma(h)} q_h v$ est borné dans X et tend vers zéro dans H ; si l'on extrait une

.../...

suite $\frac{1}{\sigma(h)} q_h v_h$ convergeant dans X faible, la limite v vérifie $|v| = 0$. Le lemme résulte de (2.3) : v appartenant à V est nul.

Proposition 4.3. u étant donné dans V

$$(4.15) \quad \frac{1}{\sigma(h)} A_h q_h u \rightarrow 0 \text{ dans } H \text{ fort } (*)$$

Démonstration - $\frac{1}{\sigma(h)} A_h q_h u$ est borné dans H puisque

$$(4.16) \quad \left(\frac{1}{\sigma(h)} A_h q_h u, v \right) = a(q_h u, \frac{1}{\sigma(h)} q_h v)$$

le lemme 4.2 et la convergence forte de q_h montrent que (4.16) converge vers zéro uniformément sur le bornés de H .

(*) i.e. $\left| \frac{1}{\sigma(h)} A_h q_h u \right| \rightarrow 0$; on définit de la même

façon la notion de "borné dans H ".

V RECAPITULATION

Rassemblons les données et les hypothèses de ce chapitre qui serviront ultérieurement.

1° Données

a) Soit V un sous-espace de Hilbert d'un espace de Hilbert X , dont on note (u, v) le produit scalaire et $\|u\|$ la norme.

b) Sur X on se donne une forme hermitienne non négative continue, notée (u, v) et soit $|u|$ la semi-norme correspondante.

On suppose que $|u|$ est une norme sur V et on appelle H le complété de V pour cette norme.

2°) Approximation

Nos constructions de schémas d'approximation s'appuieront sur la donnée d'une famille d'applications q_h ($h \rightarrow 0$) vérifiant les hypothèses de consistance suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_h : V \rightarrow X \text{ linéaire} \\ q_h V = V_h \text{ est de dimension finie ;} \\ ||q_h v|| \leq M ||v|| \quad \forall v \in V, \forall h ; \\ q_h v \rightarrow v \quad (h \rightarrow 0) \text{ dans } X, \forall v \in V \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |q_h v| = 0 \Rightarrow q_h v = 0 \\ (u, q_h v) = (q_h u, q_h v) , \quad \forall u \text{ et } v \in V \end{array} \right.$$

$$u_h \in V_h \text{ et } u_h \rightarrow v \text{ dans } X \text{ faible} \Rightarrow v \in V$$

Nous utiliserons aussi $\sigma(h)$, tendant vers l'infini quand h tend vers zéro, et tel que

$$||q_h v|| \leq \sigma(h) |q_h v|, \quad \forall v \in V, \forall h.$$

Chapitre II — PROBLEMES PARABOLIQUES LINEAIRES (I)

Ce chapitre est principalement destiné à introduire le cadre (problème, schémas d'approximation, stabilité, convergence) où se situera le chapitre suivant. Dans la première partie (§ I-II-III-IV), nous fixons les hypothèses et les notations et nous rappelons les résultats de RAVIART (2). Dans la deuxième partie (§ V-VI), nous démontrons la convergence forte des approximations.

I Formulation du problème

$$u' (t) + A (t) u (t) = f (t)$$

$$u (0) = u_0$$

II Approximations

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} + A_h^n [\theta u_{n+1} + (1-\theta) u_n] = f_h^n$$

III Stabilité

$$\text{dans } L_2 (0, T \rightarrow V) \text{ et } L_\infty (0, T \rightarrow H)$$

IV Convergence faible

V Convergence forte

VI Cas des formes hermitiennes : convergence forte

$$u_h (t) \rightarrow u (t) \text{ dans } V$$

$$\frac{u_h (t) - u_h (t - \Delta t)}{\Delta t} \rightarrow u' (t) \text{ dans } L_2 (0, T \rightarrow H).$$

.../...

I Formulation Variationnelle-

Théorème I.1 (LIONS [3])

Avec les données du chap. I § V, 1° on se donne, pour $t \in (0, T)$, une famille de formes sesquili-
néaires $a(t; u, v)$ sur $X \times X$, vérifiant les condi-
tions

$$(I.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} t \rightarrow a(t; u, v) \text{ mesurable, } \forall u, v \in X \\ |a(t; u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad \forall u, v \in X, t \in (0, T) \\ \operatorname{Re} a(t, u, u) \geq \alpha \|u\|^2 - \lambda |u|^2, \forall u \in X, t \in (0, T) \quad (\alpha > 0) \end{array} \right.$$

Alors le problème

$$(I.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in L_2(0, T \rightarrow V) \cap L^\infty(0, T \rightarrow H) \\ (u(t), v) + \int_0^t a(s, u(s), v) ds = \int_0^t (f(s), v) ds + \\ + (u_0, v), \forall v \in V, t \in (0, T) \end{array} \right.$$

à une solution unique, u_0 étant donné dans H et f dans $L_2(0, T \rightarrow H)$.

De plus la solution $u(t)$ de (1.2) appartient à $C(0, T \rightarrow H)$, et vérifie "l'égalité d'énergie"

$$(I.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \|u(t)\|^2 + \operatorname{Re} \int_0^t a(s; u(s), u(s)) ds = \\ \operatorname{Re} \int_0^t (f(s), u(s)) ds + \frac{1}{2} \|u_0\|^2 \end{array} \right.$$

Remarque II - Nous supposons que les données sont prolongées en dehors de $(0, T)$ les conditions (I.1) restant satisfaites.

II Approximation

1°) Généralités.

Pour construire des schémas d'approximation de problèmes d'évolution, aux q_h du Chap. I §V, 2°, ajoutons un découpage du temps en intervalles de longueur k (tendant vers zéro avec h). A toute suite $\{v_0, v_1, \dots, v_n \dots\}$ d'éléments de X , on associe la fonction

$$(2.1) \quad v(t) = v_{n+1} \quad \text{si } nk < t \leq (n+1)k.$$

Etant donné une forme sesquilinéaire $a(t; u, v)$ sur $X \times X$, intégrable en t , et une fonction $f(t)$ de

$L_2(0, T \rightarrow H)$, on leur fait correspondre la suite d'opérateurs linéaires $\{A_h^n\}$ sur V_h et la suite d'éléments $\{f_h^n\}$ de V_h définis par

$$(2.2) \quad (A_h^n q_h u, q_h v) = \frac{1}{k} \int_{(n-1)k}^{nk} a(t; q_h u, q_h v) dt, \forall u, v \in V$$

$$(2.3) \quad (f_h^n, q_h v) = \frac{1}{k} \int_{(n-1)k}^{nk} (f(t), q_h v) dt, \forall v \in V$$

2° Application au problème (1.2)

Proposition 2.1

Soit A_h^n les opérateurs correspondant aux formes $a(t, u, v)$ du § I ; étant donné $\theta \in [0, 1]$,
pour k assez petit, il existe une suite unique $\{u_h^n\}$ vérifiant

.../...

$$(2.4) \begin{cases} u_h^0 = q_h u_0 \\ \frac{1}{k} [u_h^{n+1} - u_h^n] + A_h^{n+1} [\theta u_h^{n+1} + (1-\theta)u_h^n] = f_h^{n+1} \end{cases}$$

(démonstration évidente).

Remarque 2.1 - A la suite $\{u_h^n\}$ ainsi obtenue, on associe la fonction $u_h(t)$, définie au 1°, dont on montrera qu'elle approche la solution $u(t)$ du problème (1.2), lorsque h tend vers zéro.

III Egalité d'Energie - Stabilité

Proposition 3.1 (Egalité d'énergie)

(3.2) Soit $w_h^n = \eta u_h^n + (1-\eta) u_h^{n-1}$; ($\eta = \max(\theta, 1-\theta)$)
alors la solution u_h^n de (2.5) vérifie l'égalité

$$(3.3) \begin{cases} \frac{1}{2k} (|u_h^{n+1}|^2 - |u_h^n|^2) + \frac{2\eta-1}{2k} |u_h^{n+1} - u_h^n|^2 + \\ + \operatorname{Re}(A_h^{n+1} [\theta u_h^{n+1} + (1-\theta)u_h^n], w_h^{n+1}) = \operatorname{Re}(f_h^{n+1}, w_h^{n+1}) \end{cases}$$

(démonstration : On fait le produit scalaire de H de (2.5) et de w_h^{n+1}).

Proposition 3.2 (Stabilité)

Sous les hypothèses du § I-II, et si, dans le cas $\theta < 1/2$ la condition de stabilité

$$(3.4) \quad k M^2 \sigma(h)^2 \leq \frac{2\alpha}{1-2\theta} (1-\delta) \quad (\forall h)$$

(δ constante positive arbitrairement petite) est vérifiée, la solution approchée $u_h(t)$ vérifie les majorations

$$(3.5) \quad |u_h(t)| \leq C, t \in [0, T]$$

$$(3.6) \quad \int_0^T || \theta u_h(t) + (1-\theta) u_h(t-k) ||^2 dt \leq C,$$

C, constante indépendante de h et k.

De plus si, dans le cas $\theta = 1/2$, la condition

$$(3.7) \quad "k \sigma(h)^2 \text{ borné}"$$

est satisfaite, on a

$$(3.8) \quad \frac{1}{k} \int_0^T |u_h(t) - u_h(t-k)|^2 dt \leq C$$

(Démonstration : cf. RAVIART [2]).

Corollaire 3.1

Sous les hypothèses de la proposition 3.2 et sous la condition supplémentaire (3.7), la solution approchée vérifie

$$(3.9) \quad \int_0^T ||u_h(t)||^2 dt \leq C (*)$$

Exemple 3.1-

Approchons l'opérateur $-\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ sur $H_0^1(0,1)$ par

le schéma standard à trois points défini par la matrice

$$(3.10) \quad A_h = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$|u_h|$ désignant la norme euclidienne des vecteurs on peut prendre (cf. CEA [1])

(*) les C désignent des constantes en général différentes.

$$(3.11) \quad ||u_h||^2 = |u_h|^2 + (A_h u_h, u_h)$$

et puisque le rayon spectral de A_h est

$$(3.12) \quad \rho = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi}{2h}$$

on pourra poser

$$(3.13) \quad \sigma(h) = 1 + \frac{4}{h^2};$$

ainsi la condition (3.7) s'écrit sur cet exemple

$$(3.14) \quad k/h^2 \leq \text{constante.}$$

On voit que, pour que (3.9) soit vérifiée, $u_0(x)$ étant dans $L_2(0,1)$, il faut que

$$(3.15) \quad k ||u_h^0||^2 \leq C^{st} |u_h^0|^2, \quad \forall u_h^0$$

ce qui, d'après (3.12), nécessite (3.14).

Le schéma d'approximation de l'équation de la chaleur donné par (2.5) et (3.10) (cf. RICHTHYER [4],) à une précision en $O(h^2+k)$ si $\theta \neq 1/2$ et en $O(h^2+k^2)$ si $\theta = 1/2$.

Remarquons aussi que le conditionnement (cf. WILKINSON [5],) du système d'équations linéaires (2.5.) donnant

u_h^{n+1} est approximativement $1 + 4^\theta \frac{k}{h^2}$; il n'est borné, pour h tendant vers zéro, que sous la condition (3.14).

Ces remarques montrent, sur un exemple, que la condition (3.7) est une nécessité dans les applications pratiques; elle signifie que si (pour des raisons de précision, par exemple) on diminue h , il est dangereux de ne pas diminuer k de manière correspondante.

.../...

Remarque 3.1. - Nous retrouverons la condition (3.7) au chapitre suivant où elle joue un rôle fondamental.

IV Convergence faible

Les hypothèses de "consistance" du § II et la stabilité impliquent la convergence :

Proposition 4.1 (RAVIART [2],)

Sous les hypothèses de la proposition 3.2, si la condition de stabilité (3.4) est satisfaite, la solution approchée $u_h(t)$ converge vers la solution $u(t)$ du problème (1.2) dans $L_2(0, T \rightarrow X)$ faible et dans $L_\infty(0, T \rightarrow H)$ *-faible :

$$\begin{aligned} \theta u_h(t) + (1-\theta) u_h(t-k) &\rightarrow u(t) \text{ dans } L_2(0, T \rightarrow X) \text{ faible,} \\ (u_h(t), v) &\rightarrow (u(t), v) \quad \forall t \in (0, T) \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

Démonstration - Donnons brièvement les étapes de la démonstration ; elles serviront au chapitre suivant.

1) Pour $(n-1)k < t \leq nk$, u_h vérifie, quel que soit $v \in V$,

$$(4.1) \quad \left[\begin{aligned} (u_h(t), q_h v) + \int_0^{nk} a(s; \theta u_h(s) + (1-\theta) u_h(s-k), q_h v) ds = \\ = \int_0^{nk} (f(s), q_h v) ds + (u_h^0, q_h v) \end{aligned} \right.$$

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{aligned} 2) \text{ La stabilité et la convergence de } q_h v \text{ montrent que,} \\ (u_h(t), v) + \int_0^t a(s; \theta u_h(s) + (1-\theta) u_h(s-k), v) ds \rightarrow \\ \rightarrow \int_0^t (f(s), v) ds + (u_0, v). \end{aligned} \right.$$

3) La stabilité dans $L_2(0, T \rightarrow X)$ montre que l'on peut extraire de $\{u_h\}$ une suite $\{u_{h'}\}$ telle que $\theta u_{h'}(s) + (1-\theta) u_{h'}(s-k')$ converge dans $L_2(0, T \rightarrow X)$ faible vers

.../...

un $\hat{u}$; alors

$$(4.3) \quad (u_n(t), v) + \int_0^t a(s, \hat{u}(s), v) ds \rightarrow \int_0^t (f(s), v) ds + (u_e, v)$$

4) $\{u_n\}$ étant borné dans $L_\infty(0, T \rightarrow H)$, nécessairement

$$(4.4) \quad (u_n(t), v) \rightarrow (\hat{u}(t), v) \text{ p.p en } t, \forall v \in V.$$

5) Enfin les hypothèses de consistance

(Chap. I, (2.3)) impliquent que $\hat{u}$ est dans

$L_2(0, T \rightarrow V)$ (et non seulement dans $L_2(0, T \rightarrow X)$) ;

donc $\hat{u} = u$ et la suite u_n elle-même, converge.

V Convergence forte

Soit $(n-1)k < t \leq nk$; l'égalité d'énergie (3.3) donne

$$(5.1) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{2} |u_n(t)|^2 + \int_0^{nk} \left\{ \frac{2\eta-1}{2k} |u_n(s) - u_n(s-k)|^2 + \operatorname{Re} a(s; v_n(s), w_n(s)) \right\} ds = \\ & \dots = \operatorname{Re} \int_0^{nk} \left(\frac{f}{k}(s), w_n(s) \right) ds + \frac{1}{2} |u_n^0|^2 \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé

$$(5.2) \quad \left\{ \begin{aligned} v_n(t) &= \theta u_n(t) + (1-\theta) u_n(t-k) \\ w_n(t) &= \eta u_n(t) + (1-\eta) u_n(t-k) \end{aligned} \right.$$

Considérons alors la quantité

$$(5.3) \quad \left\{ \begin{aligned} & -\psi_n(t) = -\frac{1}{2} |u_n(t) - u(t)|^2 + \\ & \dots + \int_0^{nk} \left\{ \frac{2\eta-1}{2k} |u_n(s) - u_n(s-k)|^2 + \operatorname{Re} a(s; v_n(s) - u(s), w_n(s) - u(s)) \right\} ds \end{aligned} \right.$$

.../...

Proposition 5.1

Si la condition de stabilité (3.4) de la proposition 3.2. est satisfaite, pour $\eta = \max(0, 1-\theta)$, l'intégrant de (5.3) est au moins égal à

$$(5.4) \quad \alpha \delta \left\| w_h(s) - u(s) \right\|^2$$

Démonstration (*) A l'aide des relations

$$(5.5) \quad a(s; v_h - u, w_h - u) = a(s; w_h - u, w_h - u) + a(s; v_h - w_h, w_h - u)$$

$$(5.6) \quad v_h(s) - w_h(s) = (\theta - \eta) [u_h(s) - u_h(s-k)]$$

On voit que l'intégrant de (5.3) est au moins
égal à

$$(5.7) \quad \left\{ \frac{2\eta-1}{2^k} \left\| u_h(s) - u_h(s-k) \right\|^2 + \alpha \left\| w_h(s) - u(s) \right\|^2 - \right. \\ \left. - M|\theta - \eta| \left\| w_h(s) - u(s) \right\| \left\| u_h(s) - u_h(s-k) \right\| \right\}$$

la majoration (3.4) et l'inégalité

$$(5.8) \quad \left\| u_h(s) - u_h(s-k) \right\| \leq \sigma(h) \left\| u_h(s) - u_h(s-k) \right\|$$

montrent que (5.7) est au moins égal à (5.4)

Proposition 5.2.

Dans les conditions d'application de la proposition 4.1,

$$\Psi_h(t) \rightarrow 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

Démonstration - Il suffit dans (5.3) de développer les termes quadratiques; les termes ne contenant que u_h se transforment à l'aide de (5.1); les termes

(*) Pour simplifier la démonstration nous supposons que

$$\lambda = 0 \quad (\text{cf } (1.1))$$

contenant u_h et u se transforment à l'aide de la proposition 4.1. en termes ne contenant que u et, pour ces derniers, on utilise (1.5).

Corollaire 5.1

$\eta u_h(t) + (1-\eta)u_h(t-k) \rightarrow u(t)$ dans $L_2(0, T \rightarrow X)$ fort
où $\eta = \max\{\theta, 1-\theta\}$

Corollaire 5.2. Pour $\theta \neq 1/2$

$$\frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)] \rightarrow 0 \text{ dans } L_2(0, T \rightarrow H) \text{ fort}$$

Corollaire 5.3. Sous l'hypothèse supplémentaire (3.7)

$$u_h \rightarrow u \text{ dans } L_2(0, T \rightarrow X) \text{ fort.}$$

Proposition 5.3- Sous les hypothèses de la proposition 5.2.

$$u_h \rightarrow u \text{ dans } L_\infty(0, T \rightarrow H) \text{ fort.}$$

Démonstration - En utilisant les résultats de convergence forte dans $L_2(0, T \rightarrow X)$ dans les relations (4.1) et (5.1) on montre que, pour tout $v \in V$,

$$(5.9) \quad \begin{cases} (u_h(t), v) \rightarrow (u(t), v) \\ |u_h(t)|^2 \rightarrow |u(t)|^2 \end{cases} \quad \text{uniformément en } t \in [0, T]$$

Soit $v(t)$ une fonction en escalier à valeurs dans V ;

(5.9) montre que

$$|u_h(t) - v(t)|^2 \rightarrow |u(t) - v(t)|^2$$

uniformément en $t \in [0, T]$; or $u(t)$ peut être approchée dans $L_\infty(0, T \rightarrow H)$ fort par une telle fonction- La proposition en résulte

.../...

Théorème 5.1

Les hypothèses sont celles des § I-II; $u(t)$ désigne la solution du problème (1.2) et $u_h(t)$ la solution approchée définie par le schéma (2.5)

$$(5.10) \quad 1) \text{ Si, lorsque } \theta < 1/2, \text{ la condition de stabilité} \\ k M^2 \sigma(h)^2 \leq \frac{2\alpha}{1-2\theta} (1-\delta) \quad (\forall h)$$

(δ constante positive arbitrairement petite) est vérifiée, la solution approchée converge fortement dans $L_2(0, T; X)$ et $L_\infty(0, T; H)$:

$$\int_0^t \| \theta u_h(t) + (1-\theta)u_h(t-k) - u(t) \|^2 dt \rightarrow 0 \\ \max_{0 \leq t \leq T} |u_h(t) - u(t)| \rightarrow 0.$$

$$(5.11) \quad 2) \text{ Si, dans le cas } \theta = 1/2 \text{ la condition supplé-} \\ \text{mentaire " } k \sigma(h)^2 \text{ borné " est satisfaite,}$$

$$\frac{1}{k} \int_0^T |u_h(t) - u_h(t-k)|^2 dt \rightarrow 0.$$

$$3) \text{ Si la condition (5.11) est vérifiée,}$$

$$\int_0^T \| u_h(t) - u(t) \|^2 dt \rightarrow 0.$$

Remarque 5.1— Dans le cas de formes $a(t, u, v)$ hermitiennes, la condition (5.10) peut-être remplacée par

$$(5.12) \quad k M \sigma(h)^2 \leq \frac{2}{1-2\theta} (1-\delta).$$

.../...

VI Cas des formes hermitiennes

Théorème 6.1. (LIONS [3])

Les hypothèses sont celles du théorème 1.1
et on suppose en outre

(6.1) $\left[\begin{array}{l} a(t;u,v) \text{ hermitienne pour } t \in [0,T] \\ t \rightarrow a(t;u,v) \text{ de classe } C^1 \forall u,v \in X \end{array} \right.$

(6.2) $u_0 \in V;$

alors la solution $u(t)$ du problème (1.2) vérifie

$u \in L^\infty(0,T \rightarrow V),$

$u' \in L_2(0,T \rightarrow H),$

(6.3)
$$\begin{aligned} a(t;u(t),u(t)) + \int_0^t \{ 2 |u'(s)|^2 - a'(s;u(s),u(s)) \} ds = \\ = a(0;u_0,u_0) + 2 \operatorname{Re} \int_0^t (f(s),u'(s)) ds \end{aligned}$$

On démontre alors (cf. RAVIART [2])

Proposition 6.1 (convergence faible)

Sous les hypothèses des théorèmes 5.1 et 6.1, si pour $\theta < 1/2$ la condition de stabilité (5.12) est vérifiée,

$u_h \rightarrow u$ dans $L^\infty(0,T \rightarrow X)$ *faible

$\frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)] \rightarrow u'(t)$ dans $L_2(0,T \rightarrow H)$ faible

Egalité d'énergie

Faisons le produit scalaire de H de (2.5) avec

$$w_h^{n+1} = \frac{1}{k} [u_h^{n+1} - u_h^n];$$

on obtient sans difficulté

.../...

$$(6.4) \left\{ \begin{aligned} & |w_h^{n+1}|^2 + (\theta - \frac{1}{2})k \left(A_h^{n+1} w_h^{n+1}, w_h^{n+1} \right) + \\ & \dots + \frac{1}{2k} \left\{ \left(A_h^{n+1} u_h^{n+1}, u_h^{n+1} \right) - \left(A_h^{n+1} u_h^n, u_h^n \right) \right\} = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2k} \left(u_h^{n+1}, w_h^{n+1} \right) \right) \end{aligned} \right.$$

Posons pour abréger

$$w_h(t) = \frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)]$$

$$a(t;v) = a(t;v,v);$$

par sommation (6.4) donne

$$(6.5) \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{nk} \left\{ |w_h(s)|^2 + (\theta - \frac{1}{2})k a(s; w_h(s)) \right\} ds + \frac{1}{2k} \int_0^{nk} \left\{ a(s; u_h(s)) - a(s; u_h(s-k)) \right\} ds = \\ & \dots = \operatorname{Re} \int_0^{nk} \left(f(s), w_h(s) \right) ds \end{aligned} \right.$$

Proposition 6.2

Soit t fixé, $t \in](n-1)k, nk]$; sous les hypothèses de la proposition 6.1

$$(6.6) \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{nk} \left\{ |w_h(s)|^2 + (\theta - \frac{1}{2})k a(s; w_h(s)) \right\} ds + \\ & + \frac{1}{2} a(t; u_h(t)) \rightarrow \int_0^t |u'(s)|^2 ds + \frac{1}{2} a(t; u(t)) \end{aligned} \right.$$

lorsque h tend vers zéro, uniformément en t , pour $t \in [0, T]$.

Démonstration : D'après (6.5) et le théorème 5.1, il suffit de montrer que

$$(6.7) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k} \int_0^{nk} \{a(s; u_h(s)) - a(s; u_h(s-k))\} ds - a(t; u_h(t)) \rightarrow \\ \rightarrow \int_0^t a'(s; u(s)) ds - a(0; u_0) - \end{array} \right.$$

uniformément en t . Or

$$(6.8) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k} \int_0^{nk} \{a(s; u_h(s)) - a(s; u_h(s-k))\} ds = \frac{1}{k} \int_{(n-1)k}^{nk} a(s+k; u_h(s)) ds - \\ - \frac{1}{k} \int_0^k a(s; u_h(s-k)) ds - \frac{1}{k} \int_0^{nk} \{a(s+k; u_h(s)) - a(s; u_h(s))\} ds; \end{array} \right.$$

la régularité de $a(t; u, v)$ et la stabilité de u_h dans $L^\infty(0, T \rightarrow X)$ montrent que

$$(6.9) \frac{1}{k} \int_{(n-1)k}^{nk} a(s+k; u_h(s)) ds - a(t; u_h(t)) \rightarrow 0$$

uniformément en t ; d'autre part

$$(6.10) \frac{1}{k} \int_0^k a(s; u_h^0) ds \rightarrow a(0; u_0);$$

enfin, la régularité de $a(t; u, v)$ et la convergence forte de u_h vers u dans $L_2(0, T \rightarrow X)$ montrent que

$$(6.11) \frac{1}{k} [a(s+k; u_h(s)) - a(s; u_h(s))] \rightarrow a'(s; u(s))$$

dans $L_1(0, T)$.

Ainsi (6.7) résulte de (6.9) (6.10) et (6.11)

Convergence forte, cas $\theta \geq 1/2$

Considérons

$$(6.12) \Psi_h(t) = \int_0^{nk} |w_h(s) - u'(s)|^2 ds + \frac{1}{2} a(t; u_h(t) - u(t)).$$

.../...

Les propositions 6.1 et 6.2 montrent que

$$(6.13) \limsup_{h,k \rightarrow 0} \{ \Psi_h(t) + \operatorname{Re} a(t; u_h(t), u(t)) \} \leq a(t; u(t)),$$

et en utilisant la convergence faible de u_h dans $L_2(0, T \rightarrow X)$, on voit que Ψ_h tend vers zéro dans $L_1(0, T)$, on en déduit la convergence forte de w_h vers u' dans $L_2(0, T \rightarrow H)$. En utilisant ce résultat dans (6.6.) on voit que

$$(6.14) \limsup_{h \rightarrow 0} a(t; u_h(t)) \leq a(t, u(t)) \text{ uniformément en } t.$$

Puisque $\|u_h(t)\|$ est borné et que $|u_h(t) - u(t)|$ tend vers zéro, nécessairement $u_h(t) - u(t)$ tend vers zéro dans X faible; alors (6.14) montre que $u_h(t) - u(t)$ tend vers zéro dans X fort.

Convergence forte cas $\theta \leq 1/2$

Lemme 6.1 Sous les hypothèses du Chap. I § V, q_h se prolonge à H et si w est dans $L_2(0, T \rightarrow H)$,

$$(6.15) \int_0^T |q_h w(t) - w(t)|^2 dt \rightarrow 0$$

$$(6.16) \frac{1}{\sigma(h)^2} \int_0^T \|q_h w(t)\|^2 dt \rightarrow 0$$

Démonstration (6.15) et (6.16) étant évidents si $w \in L_2(0, T \rightarrow V)$, Ce lemme résulte des relations d'équicontinuité

$$(6.17) \frac{1}{\sigma(h)} \|q_h v\| \leq |q_h v| \leq |v| \quad (\forall h)$$

Considérons alors l'expression

$$(6.18) \quad \left\{ \begin{aligned} \psi_h(t) = \int_0^{nk} \left\{ |w_h(s) - q_h u'(s)|^2 + \left(\theta - \frac{1}{2}\right) k a(s, w_h(s) - q_h u'(s)) \right\} ds + \\ + \frac{1}{2} a(t; u_h(t) - u(t)); \end{aligned} \right.$$

la condition de stabilité (6.12) implique

$$(6.19) \quad \psi_h(t) \geq \delta \int_0^{nk} |w_h(s) - q_h u'(s)|^2 ds + \frac{1}{2} a(t; u_h(t) - u(t)).$$

En utilisant le lemme 6.1 et en procédant comme dans le cas $\theta \geq 1/2$ on montre encore que $\psi_h(t)$ tend vers zéro.

Théorème 6.2

Les hypothèses sont celles du théorème 5.1 et du théorème 6.1; si lorsque $\theta < 1/2$, la condition de stabilité.

$$k M \sigma(h)^2 \leq \frac{2}{1-2\theta} (1-\delta) \quad (\forall h)$$

(δ positif arbitrairement petit), est satisfaite, la solution approchée converge

$$\frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)] \rightarrow u'(t) \text{ dans } L_2(0, T \rightarrow H) \text{ fort}$$

$$u_h(t) \rightarrow u(t) \text{ dans } X \text{ fort } \forall t \in [0, T]$$

$$u_h \rightarrow u \text{ dans } L_\infty(0, T \rightarrow V) \text{ *-faible}$$

Remarque 6.1 : Nous n'avons pas su montrer la convergence de u_h dans $L_\infty(0, T \rightarrow V)$ fort ; nous n'avons pu obtenir que (6.14).

Corollaire 6.1

$$\frac{1}{\sqrt{k}} [u_h(t) - u_h(t-k)] \rightarrow 0 \text{ dans } L_2(0, T \rightarrow X) \text{ fort.}$$

Chapitre III - PROBLEMES PARABOLIQUES LINEAIRES (II)

Dans ce chapitre, nous étudions les méthodes des directions alternées (Douglas [6]) et des pas fractionnaires (Yanenko [7]) et certaines généralisations.

I Une classe de schémas

On présente les deux méthodes dans le cadre de schémas de type "prédicteur-correcteur"; on met en évidence certaines perturbations dont on dégage les propriétés essentielles.

II Résultats généraux

On montre principalement que, sous une condition peu restrictive en pratique, les perturbations définies au paragraphe I ne changent pas la "consistance" des schémas.

III Méthodes des pas fractionnaires

On retrouve d'une manière légèrement différente les résultats de TEMAM [8] et on généralise la méthode à certaines classes d'opérateurs "avec dérivées mixtes" comprenant en particulier les opérateurs à partie principale hermitienne.

IV Méthode des directions alternées

On retrouve et on complète les résultats de Douglas [6].

V Une méthode à perturbations positives

On introduit une méthode simple et stable permettant, théoriquement, d'approcher tous les problèmes paraboliques linéaires.

.../...

I - Une classe de schémas d'approximation

1°) Définition des schémas

Au chapitre précédent, nous avons introduit la famille de schémas d'approximation

$$(1.1) \left[\begin{array}{l} u_h^0 = q_h u_0 \\ \frac{1}{k} [u_h^{n+1} u_h^n] + A_h^{n+1} [\theta u_h^{n+1} + (1-\theta) u_h^n] = f_h^{n+1} \quad (0 \leq \theta \leq 1) \end{array} \right.$$

Dans ce chapitre nous allons partiellement surmonter les difficultés présentées par la résolution des systèmes d'équations linéaires des schémas implicites ($\theta > 0$) par des méthodes que l'on peut apparenter à celles dites "prédicteur-correcteur".

Hypothèse 1.1

Reprenons le problème et les notations du chap. II § I et nous supposons que les formes $a(t; u, v)$ peuvent s'écrire

$$(1.2) \quad a(t; u, v) = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i(t; u, v) + b(t; u, v)$$

et que

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} |a_i(t; u, v)| \leq M ||u|| ||v|| \quad (1 \leq i \leq p) \\ \operatorname{Re} a_i(t; u, u) \geq 0 \\ \operatorname{Re} \sum_{1 \leq i \leq p} a_i(t; u, u) \geq \alpha ||u||^2 \quad (\alpha > 0) \end{array} \right.$$

quels que soient u et v dans X et quel que soit t .

.../...

Exemple 1.1

1) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^p$ et X l'espace $[L_2(\Omega)]^{p+1}$ d'élément générique $u = \{u_0, u_1, \dots, u_p\}$

on pose

$$(u, v) = \int_{\Omega} u_0(x) \bar{v}_0(x) dx;$$

$H^1(\Omega)$ est identifié au sous-espace de Hilbert de X formé des

$$\left\{ u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_p} \right\}.$$

On se donne une famille de fonctions

$$(1.4) \quad \left[\begin{array}{l} a_{ij}(t; x) \in L_{\infty}((0, T) \times \Omega) \quad 0 \leq i, j \leq p \\ \operatorname{Re} \sum_{1 \leq i, j \leq p} a_{ij}(t; x) \xi_j \bar{\xi}_i \geq \alpha \sum_{1 \leq i \leq p} |\xi_i|^2, \quad \forall \xi_j \in \mathbb{C}, \\ a_{00}(t; x) \geq \alpha > 0 \end{array} \right.$$

Sur $X \times X$, on définit les formes sesquilinéaires

$$(1.5) \quad a_{ij}(t; u, v) = \int_{\Omega} a_{ij}(t; x) u_j(x) \bar{v}_i(x) dx$$

$$(1.6) \quad a(t; u, v) = \sum_{0 \leq i, j \leq p} a_{ij}(t; u, v);$$

V , étant un sous-espace fermé de $H^1(\Omega)$ contenant $H_0^1(\Omega)$

les conditions d'application du théorème 1.1 du chapitre II sont satisfaites et le problème parabolique correspondant s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{1 \leq i, j \leq p} \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} u - \sum_{1 \leq j \leq p} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{j0} u + \\ \sum_{1 \leq j \leq p} a_{0j} \frac{\partial}{\partial x_j} u + a_{00} u = f \end{aligned}$$

.../...

avec des conditions aux limites appropriées.

2) On pourra prendre dans (1.2)

$$a_i(t;u,v) = a_{ii}(t;u,v) + \frac{1}{p} a_{00}(t;u,v) \quad (1 \leq i \leq p)$$

$$b(t;u,v) = \sum_{i \neq j} a_{ij}(t;u,v)$$

Exemple 1.2

Reprenons l'exemple 1-1 et donnons nous une partition de l'unité formée de fonctions non-négatives $\varphi_l(t;x)$ ($1 \leq l \leq m$) de $L_\infty((0,T) \times \Omega)$. Aux fonctions $a_{ij}(t;x) = \varphi_l(t;x)$ ($1 \leq i,j \leq p$)

on fait correspondre, de manière évidente, une forme $a_l(t;u,v)$ ($1 \leq l \leq m$). Alors la décomposition

$$a(t;u,v) = \sum_{1 \leq l \leq m} a_l(t;u,v)$$

vérifie l'hypothèse 1.1

Les φ_l peuvent être, par exemple, les fonctions caractéristiques d'un recouvrement disjoint de Ω

Exemple 1.3

Donnons un autre exemple qui a un intérêt pratique dans les cas où le problème posé a des propriétés de symétrie.

Prenons l'exemple 1-1 avec $p = 2$ et supposons le problème invariant par rotation de $\frac{\Pi}{2}$ autour de l'origine. Plus précisément, on suppose que Ω, V, u_0, f ont cette propriété et que

$$a_{00}(t;x,y) = a_{01}(t;x,y) = a_{10}(t;x,y) = 0$$

$$a_{11}(t; x, y) = a_{22}(t; -x, y) = a_{22}(t; x, -y).$$

Alors la décomposition de

$$a(t; u, v) = a_{11}(t; u, v) + a_{22}(t; u, v)$$

qui vérifie bien l'hypothèse 1-1, présente l'inconvénient que ni $a_{11}(t; u, v)$ ni $a_{22}(t; u, v)$ ne sont invariants.

Considérons la fonction

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < |y| \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases};$$

alors les formes

$$\left\{ \begin{aligned} a_1(t; u, v) &= \int_{\Omega} \{ a_{11}(t; x, y) \varphi(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \\ &\quad + a_{22}(t; x, y) [1 - \varphi(x, y)] \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \} dx dy \end{aligned} \right.$$

$$a_2(t; u, v) = a(t; u, v) - a_1(t; u, v)$$

donnent une décomposition de $a(t; u, v)$ en deux formes qui, elles, sont invariantes par les rotations de $\frac{\pi}{2}$.

Ce genre de méthode s'étend à d'autres types de symétries.

Remarque 1-1 Comme ci-dessus, dans les exemples pratiques, les formes $a_1(t; u, v)$ seront "plus simples" que $a(t; u, v)$.

La forme $b(t; u, v)$ représente la partie de $a(t; u, v)$ qu'on laissera "explicite" : par exemple, le schéma (1.1) s'obtiendra comme cas particulier en posant

$$a_1(t; u, v) = \theta a(t; u, v) \quad (p = 1)$$

$$b(t; u, v) = (1 - \theta) a(t; u, v)$$

Dans certains cas il sera intéressant de prendre pour

.../...

$b(t; u, v)$ la partie "non principale" de $a(t; u, v)$

Approximation

Reprenons les notations et les données du chapitre II § II 1°; on définit alors des opérateurs A_{ih}^n et B_h^n sur V_h , e.g.

$$(1.7.) \quad (B_h^n q_h u, q_h v) = \frac{1}{k} \int_0^{nk} b(t; q_h u, q_h v) dt$$

$$\forall u, v \in V.$$

Il n'y a pas de difficulté à montrer

Proposition 1-1

Les opérateurs A_{ih}^n et B_h^n vérifient les relations

$$(1.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} |(A_{ih}^n q_h u, q_h v)| \leq M ||q_h u|| ||q_h v|| \quad (1 \leq i \leq p) \\ \operatorname{Re} (A_{ih}^n q_h u, q_h u) \geq 0 \quad (1 \leq i \leq p) \\ \sum_{1 \leq i \leq p} \operatorname{Re} (A_{ih}^n q_h u, q_h u) \geq \alpha ||q_h u||^2 \\ |(B_h^n q_h u, q_h v)| \leq M ||q_h u|| ||q_h v|| \end{array} \right.$$

quels que soient n, h , et u, v dans V .

Première forme des schémas

Nous appliquons une méthode "prédicteur- correcteur" à l'équation

$$(1.9) \quad \frac{1}{k} [u_h^{n+1} - u_h^n] + \sum_{1 \leq i \leq p} A_{ih}^{n+1} u_h^{n+1} + B_h^{n+1} u_h^n = f_h^{n+1} :$$

partant d'une "prédiction" u_{*h}^{n+1} , dont nous verrons des choix plus loin, on effectue les p "corrections" suivantes :

.../...

$$(1.10) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k} [u_h^{n+j/p} - u_h^n] + \sum_{1 \leq i \leq j} A_{ih}^{n+1} u_h^{n+i/p} + \\ + \sum_{j < i \leq p} A_{ih}^{n+1} u_{*h}^{n+i} + B_h^{n+1} u_h^n = f_h^{n+1} \\ \text{pour } j = 1, 2, \dots, p-1, \text{ et} \\ \frac{1}{k} [u_h^{n+1} - u_h^n] + \sum_{1 \leq i \leq p} A_{ih}^{n+1} u_h^{n+i/p} + B_h^{n+1} u_h^n = f_h^{n+1} \end{array} \right.$$

On définit ainsi, à partir de u_h^0 , une suite (u_h^n) et une fonction étagée $u_h(t)$ dont on montrera qu'elle approche la solution $u(t)$ du problème du chap. II § I.

Deuxième forme

On peut écrire (1.10) sous la forme équivalente

$$(1.11) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k} [u_h^{n+1/p} - u_h^n] + A_{1h}^{n+1} u_h^{n+1/p} + [A_{2h}^{n+1} + \dots + A_{ph}^{n+1}] u_{*h}^{n+1} + \\ + B_h^{n+1} u_h^n = f_h^{n+1} \\ \frac{1}{k} [u_h^{n+j/p} - u_h^{n+(j-1)/p}] + A_{jh}^{n+1} [u_h^{n+j/p} - u_{*h}^{n+1}] = 0 \\ \quad \quad \quad (2 \leq j \leq p) \end{array} \right.$$

Troisième forme

En éliminant dans (1.11) les variables intermédiaires, on peut écrire le schéma ainsi défini comme une variante "perturbée" de (1.9) :

$$(1.12) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k} [u_h^{n+1} - u_h^n] + \sum_{1 \leq i \leq p} A_{ih}^{n+1} u_h^{n+i} + B_h^{n+1} u_h^n + \\ + P_h^{n+1} [u_h^{n+1} - u_{*h}^{n+1}] = f_h^{n+1} \end{array} \right.$$

.../...

avec

$$(1.13) \quad P_h^n = \frac{1}{k} \sum_{\substack{2 \leq r \leq p \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq p}} k^r A_{j_1 h}^n A_{j_2 h}^n \dots A_{j_r h}^n$$

C'est ce point de vue que l'on adoptera la plupart du temps par la suite.

Avant d'étudier les perturbations (1.13), parlons du

Choix du "prédicteur" u_{*h}^{n+1}

Deux types de méthodes se rencontrent ;

le choix $u_{*h}^{n+1} = u_h^n$: c'est le plus raisonnable de notre

point de vue; il conduit aux méthodes des "directions alternées" de DOUGLAS [6], dont nous avons emprunté la présentation.

Le choix $u_{*h}^{n+1} = 0$: c'est le plus simple; il conduit aux méthodes des "pas fractionnaires", introduites par MARCHOUK, SAMARSKI, YANENKO, dont une étude approfondie est faite dans TEMAM [8].

Remarque 1-2 En semi-discrétisation par rapport au temps ($q_h =$ identité), pour p plus grand que deux, la méthode des directions alternées n'a pas de sens (u_h^n n'appartient pas à l'espace de définition de l'opérateur $[A_2^{n+1} + \dots + A_p^n]$ (cf. TEMAM [8])).

.../...

2° - Etude des opérateurs P_h^n

La présentation que nous avons adoptée est intimement liée à la dimension finie des espaces V_h . Les opérateurs A_{jh}^n approchent des opérateurs non bornés $A_j(t)$ (cf. Chap. I Prop. 4-2), mais nous allons profiter de la présence des facteurs k^r dans (1-13) pour borner P_h^n

Proposition 1-2

Quel que soit u dans V

$$(1.14) \quad |A_{ih}^n q_h u| \leq M \sigma(h) ||q_h u||$$

$$(1.15) \quad \frac{1}{\sigma(h)} |A_{ih}^n q_h u| \rightarrow 0 \text{ (lorsque } h \rightarrow 0)$$

(Démonstration : cf. Chap. I § IV)

A l'aide de cette proposition, il est facile de montrer

Théorème 1-1

Les opérateurs P_h^n définis en (1.13) vérifient les relations

$$(1.16) \quad |(P_h^n q_h u, q_h v)| \leq \mathcal{P}(k\sigma(h)^2) ||q_h u|| ||q_h v||$$

$$(1.17) \quad |(P_h^n q_h u, q_h v)| \leq \mathcal{P}(k\sigma(h)^2) \varepsilon(h, v) ||q_h u||$$

quels que soient u et v dans V , où $\mathcal{P}(\xi)$ est un polynôme en ξ sans terme constant et où $\varepsilon(h, v)$ tend vers zéro avec h , pour v fixé dans V .

Hypothèse 1-2 (fondamentale)

Dans la suite de ce chapitre, nous supposerons, sauf indication contraire, que k et h sont liés par la relation.

$$(1.18) \quad k \sigma(h)^2 \text{ borné, } (\forall h)$$

Remarque 1-3

Nous utilisons ici explicitement le fait que V_h est de dimension finie ; la constante qui borne $k \sigma(h)^2$ peut-être choisie arbitrairement grande, à la différence des conditions de stabilité des schémas classiques (cf- Chap.II Théorème 5-1). Nous avons déjà rencontré la condition (1-18) au chap. II exemple 3-1, où nous avons discuté sa signification pratique.

Remarque 1-4

Le théorème 1-1 et l'hypothèse 1-2 montrent que les P_h^n peuvent être considérés comme de petites perturbations; nous allons préciser cela au paragraphe suivant.

Remarque 1.5

Dans le cas de l'exemple 1.1, lorsque les données sont régulières, on peut montrer (cf. DOUGLAS [6]) que l'ordre du terme de perturbation $P_h^n (u_h^n - u_{h*}^n)$ dans (1.12) est $O(k^2 + h^2)$ pour la méthode des directions alternées, tandis qu'il est $O(k+h^2)$ pour la méthode des pas fractionnaires (cf. HUBBARD [9]).

II Résultats Généraux

1° - Forme générale des schémas perturbés

Pour démontrer les résultats suivants sur les approximations définies au § I, il est aussi simple de se placer dans un cadre plus général de schémas avec perturbation. Nous reprenons les données du chapitre II et nous supposons

$$(2.1) \left\{ \begin{array}{l} a(t; u, v) = c(t; u, v) + b(t; u, v) \\ |c(t; u, v)| \leq M ||u|| ||v|| \\ \operatorname{Re} c(t; u, u) \geq 0 \end{array} \right.$$

quels que soient t , et u, v dans X .

Comme au chapitre II § II, on définit les opérateurs B_h^n , C_h^n et on considère le schéma suivant

$$(2.2) \left\{ \begin{array}{l} u_h^0 = q_h u_0 \\ \frac{1}{k} [u_h^{n+1} - u_h^n] + [C_h^{n+1} + Q_h^{n+1}] u_h^{n+1} + [B_h^{n+1} + P_h^{n+1}] u_h^n = f_h^{n+1} \end{array} \right.$$

où l'on suppose que les perturbations Q_h^n et P_h^n vérifient des relations analogues à celles, (1.16) et (1.17), du théorème 1.1. Le schéma (2.2) est une généralisation évidente de (1.12).

Théorème 2.1 (Existence)

Sous une condition de la forme

$$(2.3) \quad k \sigma(h)^2 \leq \delta \quad (\delta > 0 \text{ choisi convenablement})$$

l'équation (2.2) définit une suite unique (u_h^n) et une approximation $u_h(t)$, par

.../...

$$(2.4) \quad u_h(t) = u_h^{n+1} \text{ si } nk < t \leq (n+1)k,$$

de la solution $u(t)$ du problème de chap. II § I.

Démonstration - La démonstration résulte directement de l'hypothèse faite sur $c(t;u,v)$ et de la condition (1.16) qui donne

$$(2.5) \quad |\operatorname{Re} (kP_h^n q_h u, q_h u)| \leq k \sigma(h)^2 \int_0^t (k \sigma(h)^2) |q_h u|^2;$$

Remarque 2.1 - Dans le cas des schémas du § I, l'existence et l'unicité se vérifient directement sur la définition (1.10), sans faire intervenir une condition (2.3).

Théorème 2.2 (Consistance)

Sous l'hypothèse fondamentale (1.18), si la solution approchée $u_h(t)$ définie par (2.2) est stable dans $L^2(0, T \rightarrow X)$, i.e.

$$(2.6) \quad \int_0^T ||u_h(t)||^2 dt \leq \text{constante } (\forall h),$$

elle converge faiblement vers la solution $u(t)$ du problème (I) :

$$(2.7) \quad u_h \rightarrow u \text{ dans } L^2(0, T \rightarrow X) \text{ faible}$$

$$(2.8) \quad (u_h(t), v) \rightarrow (u(t), v) \quad \forall t, \quad \forall v \in V$$

Démonstration - On procède comme au chap. II § IV; on fait le produit scalaire (de H) de (2.2) et de $q_h v (v \in V)$ et on intègre par rapport à t . La seule différence provient des termes de perturbation : soit par exemple $w_h(t)$

la fonction étagée définie par la suite $\{q_h^n u_h^n\}$

alors d'après la relation (1-17), compte tenu de (1-18) et de la stabilité (2.6)

$$(2.9) \quad \left| \int_0^t (w_h(s), q_h v) ds \right| \leq \varepsilon(h, v) \int_0^t \|u_h(s)\|^2 ds \rightarrow 0, (h \rightarrow 0)$$

Le reste de la démonstration est inchangé.

Remarque 2.2 - Le théorème 2.2 est essentiel, il affirme en particulier la consistance des schémas du paragraphe I (sous l'hypothèse (1.18)) dont il suffira de démontrer la stabilité.

Remarque 2.3 - Sous les hypothèses du théorème 2.2, il est facile de vérifier que u_h est stable dans $L^\infty(0, T; H)$:

$$(2.10) \quad \|u_h(t)\| \leq \text{constante} \quad (\forall h)$$

et que

$$(2.11) \quad \int_0^T \frac{1}{K} \|u_h(t) - u_h(t-k)\|^2 dt \leq \text{constante}.$$

Théorème 2.3 (Stabilité)

Sous une condition de la forme (2.3), δ étant choisi assez petit, la solution approchée définie par le schéma (2.2) est stable :

$$(2.12) \quad \int_0^T \|u_h(t)\|^2 dt \leq \text{constante} \quad (\forall h)$$

Démonstration - On fait le produit scalaire de (2.2) et de u_h^{n+1} ; le théorème résulte des majorations

.../...

$$(2.13) \quad \begin{cases} |(B_h^n (u_h^n - u_h^{n-1}), u_h^n)| \leq M \sqrt{k} \sigma(h) \frac{1}{\sqrt{k}} |u_h^n - u_h^{n-1}| \|u_h^n\| \\ |(Q_h^n u_h^n, u_h^n)| \leq 2(k\sigma(h)^2) \|u_h^n\|^2 \end{cases}$$

et d'une majoration analogue par P_h^n .

Remarque 2.4 - Le théorème 2.3 affirme que l'on peut trouver une condition de stabilité de la forme (2.3) c'est-à-dire du même type que celles que l'on a trouvées au chapitre II; il n'affirme pas qu'elle soit "meilleure" que celle du schéma explicite.

Théorème 2.4 (Convergence forte)

Sous une condition de la forme (2.3), δ choisi assez petit, la solution approchée $u_h(t)$ définie par le schéma (2.2) converge fortement dans $L^2(0, T \rightarrow X)$ et $L^\infty(0, T \rightarrow H)$ vers la solution $u(t)$ du problème (I).

Démonstration - Bien que le résultat soit d'intérêt pratique faible (cf- Remarque 2.4 ci-dessus), nous en donnons la démonstration qui, du point de vue théorique, est intéressante.

a) soit $\{w_h^n\}$ la solution du schéma implicite $\theta=1$ (cf. Chap.II); la différence $v_h^n = u_h^n - w_h^n$ vérifie

$$(2.14) \quad v_h^0 = 0$$

$$(2.15) \quad \begin{cases} \frac{1}{k} [v_h^{n+1} - v_h^n] + [C_h^{n+1} + Q_h^{n+1}] v_h^{n+1} + [B_h^{n+1} + P_h^{n+1}] v_h^n = \\ = B_h^{n+1} [w_h^{n+1} - w_h^n] - Q_h^{n+1} w_h^{n+1} - P_h^{n+1} w_h^n. \end{cases}$$

b) Faisons le produit scalaire (de H) de (2-15) et de

v_h^{n+1} , désignons par $v_h(t)$, $w_h(t)$, $Q_h(t)$, $w_h(t)$, $P_h(t)$ $w_h(t)$

les fonctions étagées définies par les suites

v_h^n , w_h^n , Q_h^n w_h^n et P_h^n w_h^n . En procédant comme pour la

démonstration de la stabilité (Théorème 2-3), on montre

que si δ , dans (2-3) est assez petit, il existe une

constante C indépendante de h, t, telle que

$$(2.16) \quad \left\{ \begin{aligned} |v_h(t)|^2 + \int_0^t \|v_h(s)\|^2 ds &\leq C \int_0^T \left\{ b(s; w_h(s) - w_h(s-h), v_h(s)) + \right. \\ &\quad \left. + |(Q_h^n(s) w_h^n(s), v_h(s))| + |(P_h^n(s) w_h^n(s-h), v_h(s))| \right\} ds \end{aligned} \right.$$

c) Nous savons (cf- Chap. II Théorème 5.1) que w_h converge vers u dans $L_2(0, T \rightarrow X)$ et $L_\infty(0, T \rightarrow H)$ forts et que

v_h est borné dans $L_2(0, T \rightarrow X)$ (théorème 2-3). Ainsi, le premier terme à droite de (2-16) converge vers zéro avec

h; considérons maintenant le deuxième terme. Soit

$w(t)$ une fonction étagée (indépendante de h) à valeurs dans V; en écrivant

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{aligned} (Q_h(s) w_h(s), v_h(s)) &= (Q_h(s) q_h w(s), v_h(s)) + \\ &+ (Q_h(s) [q w_h(s) - q_h w(s)], v_h(s)) \end{aligned} \right.$$

le théorème 1-1 permet de majorer

$$(2.18) \quad \left\{ \begin{aligned} |(Q_h(s) w_h(s), v_h(s))| &\leq \varepsilon(h) \|v_h(s)\| + \\ &+ C \|w_h(s) - q_h w(s)\| \|v_h(s)\| \end{aligned} \right.$$

où C est indépendante de h, s et w et $\varepsilon(h)$, indépendante

de s, tend vers zéro avec h. On en déduit

$$(2-19) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \sup \int_0^T |(Q_h(s) w_h(s), v_h(s))| ds \leq c' \|u - w\|_{L_2(0, T \rightarrow X)}$$

et ce dernier terme peut-être rendu arbitrairement petit par un choix convenable de W .

En procédant de la même manière pour le troisième terme de (2-16), on termine la démonstration.

2° - Exemples (Cas "commutatif")

Hypothèse - Supposons qu'au paragraphe I, les opérateurs A_{ih}^n ($1 \leq i \leq p$) soient symétriques et commutatifs et supposons que B_h^n est nul.

Alors P_h^n est un opérateur symétrique non-négatif et l'équation (1.12) s'écrit

$$(2.20) \quad \frac{1}{k} [u_h^{n+1} - u_h^n] + A_h^{n+1} u_h^{n+1} + P_h^{n+1} [u_h^{n+1} - u_{*h}^{n+1}] = f_h^{n+1}$$

Remarque 2.5 - Ce cas est un "cas modèle" bien classique qui n'a guère d'intérêt pratique; dans le cas de l'exemple 1.1, il ne se rencontre que lorsque les fonctions $a_{ii}(t, x)$ sont indépendantes de x et lorsque le domaine Ω est un pavé (cf. Birkhoff-Varga [11])

Cas $u_{*h}^{n+1} = 0$

En faisant le produit scalaire de (2.20) et de u_h^{n+1} et la sommation des équations comme au chapitre II, on obtient directement la stabilité, donc, d'après le théorème 2.3, la convergence faible. On obtiendrait la convergence forte en considérant.

$$(2.21) \quad \Psi_h(T) = \frac{1}{2} |u(T) - u_h(T)|^2 + \int_0^T a(t; u(t) - u_h(t)) dt.$$

Cas $u_{*h}^{n+1} = u_h^n$.

Plaçons nous dans les hypothèses du chap. II § VI: les formes $a(t; u, v)$ sont régulières en t et u_0 est donné dans V . Alors le produit scalaire de (2.20) et de $u_h^{n+1} - u_h^n$ et la sommation donne la stabilité :

$$\left\{ \begin{array}{l} ||u_h(t)|| \leq \text{Constante pour } t \in [0, T] \\ \int_0^T \left| \frac{u_h(t) - u_h(t_k)}{k} \right|^2 dt \leq \text{constante.} \end{array} \right.$$

La convergence faible s'en suit et la convergence forte ne donne pas de difficulté.

Remarque 2.6- Il est bon de noter qu'ici, comme dans bien d'autres cas, on obtient des majorations a priori sans utiliser l'hypothèse fondamentale (1.18); nous ne nous servons de celle-ci que pour en déduire la convergence. Un raisonnement classique simple (évaluation du résidu de troncature) permet d'obtenir directement la convergence forte à partir de la majoration a priori, lorsque données et solution sont suffisamment régulières; ceci permet d'éviter (1.18), mais nous ne suivrons pas cette voie.

.../...

III.- La METHODE DES PAS FRACTIONNAIRES.

1°) Méthode classique

Nous avons défini, au paragraphe I, ces schémas par " $u_{*h}^{n+1} = 0$ ". Plaçons nous dans les hypothèses du paragraphe I, considérons la deuxième forme, (1.11), et, suivant TEMAM [8], faisons le produit scalaire (dans H) des p équations, respectivement par $u_h^{n+1/p}, u_h^{n+2/p}, \dots, u_h^{n+1}$; prenons la somme des parties réelles pour obtenir (avec des conventions d'écriture évidentes)

$$(3.1) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2k} \{ |u_{n+1}|^2 - |u_n|^2 \} + \frac{1}{2k} \sum_{1 \leq j \leq p} |u_{n+j/p} - u_{n+(j-1)/p}|^2 + \\ & + \operatorname{Re} \sum_{1 \leq j \leq p} (A_j^{n+1} u_{n+j/p}, u_{n+j/p}) + \operatorname{Re} (B^{n+1} u_n, u_{n+1/p}) = \\ & = \operatorname{Re} (f_{n+1}, u_{n+1/p}). \end{aligned} \right.$$

Lemme 3.1

Il existe des constantes, positives, M et δ , telles que

$$(3.2) \quad \operatorname{Re} \sum_{1 \leq j \leq p} (A_j^{n+1} u_{n+j/p}, u_{n+j/p}) + M \sum_{1 \leq j \leq p} \|u_{n+j/p} - u_{n+(j-1)/p}\|^2 \geq \delta \|u_{n+1}\|^2$$

Démonstration - Si $a(u, v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur X , la relation

$$(3.3) \quad a(u, u) = a(v, v) + a(u-v, v) + a(u, u-v)$$

donne la majoration

$$(3.4) \quad \operatorname{Re} a(u, u) \leq \operatorname{Re} a(v, v) + M \|v-u\| \{ 2\|u\| + \|v-u\| \}$$

et il suffit d'utiliser (3.4) en prenant

.../...

$$(3.5) \begin{cases} a(u, v) = (A_j^{n+1} u, v) \\ u = u_{n+1} \\ v = u_{n+j/p} \end{cases}$$

Corollaire 3.1

Sous l'hypothèse fondamentale (1.18), il existe une constante δ , positive, telle que

$$(3.6) \begin{cases} \frac{1}{2k} \sum_{1 \leq j \leq p} |u_{n+j/p} - u_{n+(j-1)/p}|^2 + \\ + \operatorname{Re} \sum_{1 \leq j \leq p} (A_j^{n+1} u_{n+j/p}, u_{n+j/p}) \geq \delta \|u_{n+1}\|^2. \end{cases}$$

Supposons alors que les opérateurs B_h^n soient tels que pour tout ε positif donné, il existe $M(\varepsilon)$ tel que

$$(3.7) \begin{cases} |(B_h^n q_h u, q_h v)| \leq \varepsilon \{ \|q_h u\|^2 + \|q_h v\|^2 \} + \\ + M(\varepsilon) \{ \|q_h u\|^2 + \|q_h v\|^2 \}, \forall h, \forall u, v \in V, \end{cases}$$

en utilisant la majoration (3.7) dans (3.1) et le corollaire 3.1, on obtient immédiatement la stabilité. donc d'après le théorème 2.2, la convergence faible.

Théorème 3.1-

Si la partie principale de la forme $a(t; u, v)$ du problème (Chap. II. § I.) est décomposée en somme de formes $a_1(t; u, v)$, vérifiant (1.2.) (1.3.), la méthode des pas fractionnaires, définie au paragraphe I, sous la condition

$$(3.8) \quad k \sigma(h)^2 \leq \text{constante},$$

donne une solution approchée, $u_h(t)$, stable :

.../...

$$\left| \begin{array}{l} |u_h(t)| \leq \text{constante, } t \in [0, T] \\ \int_0^T ||u_h(t)||^2 dt \leq \text{constante} \\ \int_0^T \frac{1}{k} |u_h(t) - u_h(t-k)|^2 dt \leq \text{constante.} \end{array} \right.$$

En combinant les méthodes de démonstration du théorème 2-4 et du théorème 3.1, on montre

Théorème 3-2

Dans les conditions d'application du théorème 3.1, la solution approchée $u_h(t)$ converge vers la solution $u(t)$ du problème (Chap. II § I) dans $L_2(0, T \rightarrow X)$ fort et $L_\infty(0, T \rightarrow H)$ fort.

Démonstration (succinte) - w_n désignant la solution du schéma implicite standard " $\theta=1$ " (cf. Chap. II), soit v_n la solution obtenue en remplaçant dans (I. II) le terme f_{n+1} par $B^{n+1}(w_{n+1} - w_n) - P^{n+1}w_{n+1}$, avec la condition initiale $v_0 = 0$. Alors, d'après (1.12), $v_n = u_n - w_n$. En procédant comme dans la démonstration du théorème 3-1, on montre qu'il existe une constante C indépendante de h et t , telle que

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} |v_h(t)|^2 + \int_0^t \left\{ ||v_h(s)||^2 + \frac{1}{k} |v_h(s) - v_h(s-k)|^2 \right\} ds \leq \\ \leq C \int_0^T \left\{ |b(s; w_h(s) - w_h(s-k), v_h(s))| + \right. \\ \left. + |(P_h(s)w_h(s), v_h(s))| \right\} ds \end{array} \right.$$

et on montre comme pour le théorème 2-4 que le membre de droite de (3.9) tend vers zéro avec h .

Exemple 3-1

Dans le cas de l'exemple 1-1, en l'absence de dérivées mixtes ($a_{ij} = a_{ji} = 0$ pour $1 \leq i < j \leq p$), on pourra appliquer le théorème 3.2 en prenant

$$a_i(t; u, v) = a_{ii}(t; u, v) \quad (1 \leq i \leq p)$$

$$b(t; uv) = \sum_{i,j=0} a_{ij}(t; u, v)$$

Exemple 3-2

Plus généralement, la méthode des pas fractionnaires s'applique aux problèmes paraboliques pour lesquels la forme $a(t; u, v)$ a une partie principale décomposée en somme :

$$a_i(t; u, v) = \int_{\Omega} a_i(t; x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^m u \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^m \bar{v} \, dx \quad (1 \leq i \leq p)$$

Remarque 3-1

Les équations (1-10) se présentent sous la forme d'une famille d'équations linéaires algébriques

$$M u = b.$$

Les applications pratiques intéressantes sont celles où la matrice M est facile à inverser ; l'exemple typique en est donné par l'exemple 3-1 où (pour un q_h usuel) les matrices M ont la forme tri-diagonale

$$(3.10) \quad \begin{bmatrix} \times & \times & & & \\ & \times & \times & \times & \\ & & \times & \times & \times \\ & & & \times & \times & \times \\ & & & & \times & \times \end{bmatrix}$$

Exemple 3.3

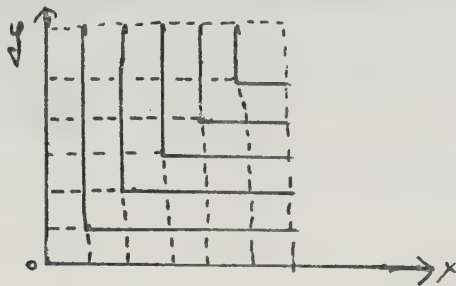
La méthode des pas fractionnaires s'applique à l'exemple 1.3.

.../...

Il est intéressant de noter que, si l'on prend un maillage (h) invariant par rotations de $\Pi/2$ et si l'on définit q_h convenablement, les opérateurs A_{1h}^n et A_{2h}^n sont invariants par ces rotations. L'avantage d'une telle décomposition est que l'on pourra travailler sur un quart du domaine (ce que n'aurait pas permis une décomposition usuelle). Les équations (1.10) correspondantes sont encore faciles à résoudre : les matrices sont de la forme (3.10) ou de la forme

$$\begin{bmatrix} \times & \times & & & & & & \times \\ & \times & \times & \times & & & & \\ & & \times & \times & \times & & & \\ & & & \times & \times & \times & & \\ & & & & \times & \times & \times & \\ & & & & & \times & \times & \times \\ & & & & & & \times & \times \\ \times & & & & & & & \end{bmatrix}$$

Le schéma suivant indique, dans le quart de plan, les deux "directions" utilisées



2° Généralisation (I)

Nous donnons maintenant une généralisation de la méthode des pas fractionnaires, qui n'existe pas dans le cadre du § I, et qui permet de traiter certains problèmes avec des "dérivées mixtes".

../..

Hypothèse 3.1

La forme $a(t; u, v)$ du chap. II, § I à les propriétés suivantes :

$$(3.11) \quad a(t; u, v) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq p} a_{ji}(t; u, v) + b(t; u, v);$$

$$(3.12) \quad |b(t; u, v)| \leq \varepsilon \{ ||u||^2 + ||v||^2 \} + M(\varepsilon) \{ |u|^2 + |v|^2 \} \\ (\varepsilon \text{ arbitraire});$$

$$(3.13) \quad |a_{ji}(t; u, v)| \leq M ||u|| ||v||;$$

$$(3.14) \quad \operatorname{Re} a_{ii}(t; u, u) \geq 0;$$

$$(3.15) \quad \operatorname{Re} \sum_{1 \leq i \leq p} a_{ii}(t; u, u) \geq \alpha ||u||^2 - M |u|^2 \quad (\alpha > 0);$$

$$(3.16) \quad \operatorname{Re} \sum_{1 \leq i \leq j \leq p} a_{ji}(t; u_i, u_j) \geq \alpha \operatorname{Re} \sum_{1 \leq i \leq p} a_{ii}(t; u_i, u_i);$$

quels que soient les u, v, u_i ($1 \leq i \leq p$) dans X , et t .

Remarque 3.2

La condition (3.12) est satisfaite si $b(t; u, v)$ est la partie non principale de $a(t; u, v)$.

Exemple 3.4

Reprenons l'exemple 1.1 et supposons que $a_{ij} = 0$ si $1 \leq i < j$.

Alors en prenant

$$(3.17) \quad b(t; u, v) = \sum_{i, j=0} a_{ij}(t; u, v)$$

la décomposition (3.11) vérifie bien l'hypothèse 3.1

.../...

Exemple 3.5

Plus généralement l'hypothèse 3.1 est vérifiée dans le cas de problèmes paraboliques **variationnels** dont l'opérateur différentiel d'espace a une partie principale qui peut se mettre sous la forme

$$(3.23) \quad \sum_{1 \leq i \leq j \leq p} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^m a_{ji}(t; x) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^m$$

(avec des conditions aux limites correspondantes). En particulier tous les problèmes paraboliques à coefficients réguliers, avec conditions de Dirichlet au bord, sont de ce type.

Approximation

Les q_h du (chap. I, § V.) permettent de définir sur $q_h V$ les opérateurs A_{ijh}^n et B_h^n par

$$(3.24) \quad (A_{ijh}^n q_h u, q_h v) = \frac{1}{k} \int_{(n-1)k}^{nk} a_{ij}(t; q_h u, q_h v) dt$$

$$(3.25) \quad (B_h^n q_h u, q_h v) = \frac{1}{k} \int_{(n-1)k}^{nk} b(t; q_h u, q_h v) dt$$

qui vérifient des relations analogues à (3.11) - (3.16).

Schéma

Partant d'une approximation u_h^0 de u_0 , par exemple

$$(3.26) \quad u_h^0 = q_h u_0$$

on définit la suite u_h^n par les équations (cf. (1.11))

$$(3.27) \begin{cases} \frac{1}{k} [u_h^{n+1/p} - u_h^n] + A_{11h}^{n+1} u_h^{n+1/p} + B_h^{n+1} u_h^n = f_h^{n+1} \\ \frac{1}{k} [u_h^{n+j/p} - u_h^{n+(j-1)/p}] + \sum_{1 \leq i \leq j} A_{ji h}^{n+1} u_h^{n+i/p} = 0 \quad (2 \leq j \leq p) \end{cases}$$

Les équations (3.27) définissent une suite unique (u_h^n) .
On construit alors une solution approchée $u_h(t)$ (cf. (2.4'))
que l'on va maintenant étudier.

Egalité d'énergie

Comme au 1°, faisons le produit scalaire des p équations
(3.27) respectivement par $u_h^{n+1/p}, \dots, u_h^{n+1}$ et prenons
en la somme des parties réelles pour obtenir (cf. (3.1')): (*)

$$(3.28) \begin{cases} \frac{1}{2k} \{ |u_{n+1}|^2 - |u_n|^2 \} + \frac{1}{2k} \sum_{1 \leq j \leq p} |u_{n+j/p} - u_{n+(j-1)/p}|^2 + \\ + \operatorname{Re} \sum_{1 \leq i \leq j \leq p} (A_{ji}^{n+1} u_{n+i/p}, u_{n+j/p}) + \operatorname{Re} (B^{n+1} u_n, u_{n+1/p}) = \\ = \operatorname{Re} (f_{n+1}, u_{n+1/p}) \end{cases}$$

A l'aide (3.15) (3.16), on démontre comme au (1°)

Théorème 3-3 (Stabilité)

Si la forme $a(t; u, v)$ du problème du (chap. II § I.)
vérifie l'hypothèse 3.1, la méthode des pas
fractionnaires, définie par les équations (3.27)
donne une solution approchée qui, sous la condi-
tion (3.8'), est stable :

*) Avec des notations évidentes, u_n pour u_h^n

$$(3.29) \quad |u_h(t)| \leq \text{constante } t \in [0, T]$$

$$(3.30) \quad \int_0^T ||u_h(t)||^2 dt \leq \text{constante.}$$

on obtient en même temps

Proposition 3.1

La solution de (3.27), sous la condition (3.8), vérifie les majorations

$$(3.31) \quad \sum_{nk \leq T} \sum_{1 \leq j \leq p} |u_{n+j/p} - u_{n+(j-1)/p}|^2 \leq \text{constante}$$

Convergence

Les méthodes du paragraphe II ne s'appliquent pas simplement ici.

Lemme 3.2

Soit v_h une fonction étagée définie par une suite (v_h^n) d'éléments de V_h ; si v_h est bornée dans $L_2(0, T \rightarrow H)$, $\frac{1}{\sigma(h)} v_h$ tend vers zéro dans $L_2(0, T \rightarrow X)$ faible.

Démonstration - $\frac{1}{\sigma(h)}$ est bornée dans $L_2(0, T \rightarrow X)$, une suite extraite converge faiblement dans cet espace vers une fonction $v(t)$; quels que soient a et b ,

$$(3.32) \quad \int_a^b \frac{1}{\sigma(h)} v_h(t) dt \rightarrow \int_a^b v(t) dt \text{ dans } X \text{ faible,}$$

et (chap. I lemme 4-2) la limite est nulle, donc v est nulle.

Corollaire 3.2

Dans les conditions d'application du théorème 3.3, les fonctions étagées définies par les suites $u_h^{n+j/p} - u_h^n$ ($1 \leq j \leq p$), convergent vers zéro dans $L_2(0, T \rightarrow X)$ faible.

Démonstration - Cela résulte directement du lemme 3.2, de la Proposition 3.1 et de la condition (3.8).

Théorème 3.4 (Convergence forte)

Dans les conditions d'application du théorème 3-3, la solution approchée $u_h(t)$ converge vers la solution exacte $u(t)$ dans $L_2(0, T \rightarrow X)$ et $L^\infty(0, T \rightarrow H)$ forts.

Démonstration - Soit w_n la solution fournie par le schéma implicite standard " $\theta=1$ " (cf- Chapitre II); considérons l'expression

$$(3.33) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2k} \{ |u_{n+1}^{-w_{n+1}}|^2 - |u_n^{-w_n}|^2 \} + \frac{1}{2k} \sum_{1 \leq j \leq p} |u_{n+j/p}^{-u_{n+(j-1)/p}}|^2 \\ & + \operatorname{Re} \sum_{1 \leq i \leq j \leq \hat{p}} (A_{ji}^{n+1} [u_{n+1/p}^{-w_{n+1}}, u_{n+j/p}^{-w_{n+1}}] + \\ & \operatorname{Re} (B^{n+1} [u_n^{-w_{n+1}}, u_{n+1/p}^{-w_{n+1}}]) \end{aligned} \right.$$

La démonstration de la stabilité (Théorème 3.3) montre que l'expression (3.33) est au moins égale à

$$(3.34) \quad \frac{1}{2k} \{ |u_{n+1}^{-w_{n+1}}|^2 - |u_n^{-w_n}|^2 \} + \delta ||u_{n+1}^{-w_{n+1}}||^2 \quad (\delta > 0).$$

D'autre part, un calcul explicite, d'après les équations

.../...

définissant u_n et w_n , montre que (3.33) est identique à

$$(3.35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2k} |w_{n+1} - w_n|^2 + \operatorname{Re} \sum_{1 \leq i \leq j \leq p} (A_{ji}^{n+1} w_{n+1} u_n - u_{n+j/p}) + \\ + \operatorname{Re} (B^{n+1} w_{n+1} \bar{f}_{n+1} u_n - u_{n+1/p}). \end{array} \right.$$

Il résulte alors de la convergence forte de la solution approchée $w_h(t)$ (Chap. II, théorème 5.1) et du corollaire 3-2 que $u_h - w_h$ tend vers zéro dans $L_2(0, T \rightarrow X)$ et que $|u_h(t) - w_h(t)|$ tend vers zéro. On montre ensuite sans difficulté la convergence dans $L^\infty(0, T \rightarrow H)$.

3°) Généralisation (II) - Formes à partie principale hermitienne.

Nous donnons maintenant une généralisation qui permet de traiter pratiquement tous les problèmes paraboliques où l'opérateur différentiel a une partie principale hermitienne.

Hypothèse 3.2

La partie principale de $a(t; u, v)$ est hermitienne et somme de formes $a_{ij}(t; u, v)$ ($1 \leq i, j \leq p$) :

$$(3.40) \quad a(t; u, v) = \sum_{1 \leq i, j \leq p} a_{ij}(t; u, v) + b(t; u, v)$$

où $b(t; u, v)$ vérifie (3.12) et les $a_{ij}(t; u, v)$ vérifient (3.13) (3.14) et 3.15); on suppose encore

$$(3.41) \quad a_{ij}(t; u, v) = \overline{a_{ji}(t; v, u)}$$

$$(3.42) \quad \operatorname{Re} \sum_{1 \leq i, j \leq p} a_{ij}(t; u_j, u_i) \geq \alpha \operatorname{Re} \sum_{1 \leq i \leq p} a_{ii}(t; u_i, u_i) \quad (\alpha > 0).$$

Exemple 3.6

Reprenons l'exemple 1.1 et supposons que les fonctions $a_{ij}(t; x)$ vérifient la relation

$$(3.43) \quad a_{ij}(t; x) = \overline{a_{ji}(t; x)} \quad (1 \leq i, j \leq p);$$

alors l'hypothèse 3.2 est vérifiée.

Proposition 3.2

Les formes $a_{ij}(t; u, v)$ vérifient la relation

$$(3.46) \quad \operatorname{Re} \sum_{1 \leq i \leq j \leq p} a_{ji}(t; u_i, u_j) \geq \frac{1+\alpha}{2} \operatorname{Re} \sum_{1 \leq i \leq p} a_{ii}(t; u_i, u_i)$$

(Démonstration sans difficulté).

Proposition 3.3

Définissons les formes $c_{ij}(t; u, v)$ ($1 \leq j \leq i \leq 2p-1$) par

$$(3.47) \quad c_{ii}(t; u, v) = \begin{cases} \frac{1}{2} a_{ii}(t; u, v) & \text{pour } 1 \leq i < p \\ a_{pp}(t; u, v) & \text{pour } i = p \\ \frac{1}{2} a_{2p-i, 2p-i}(t; u, v) & \text{pour } i \leq 2p-1 \end{cases}$$

$$(3.48) \quad c_{ij}(t; u, v) = \begin{cases} a_{ij}(t; u, v) & \text{pour } 1 \leq j < i \leq p \\ a_{2p-i, 2p-j}(t; u, v) & \text{pour } p \leq j < i \leq 2p-1 \end{cases}$$

et les autres sont nulles.

Alors les formes $c_{ij}(t; u, v)$ satisfont l'hypothèse 3.1 :

.../...

$$(3.49) \quad a(t; u, v) = \sum_{1 \leq j \leq i \leq 2p-1} c_{ij}(t; u, v) + b(t; u, v)$$

$$(3.50) \quad \operatorname{Re} \sum_{1 \leq j \leq i \leq 2p-1} c_{ij}(t; u_j, u_i) \geq \alpha \operatorname{Re} \sum_{1 \leq i \leq 2p-1} c_{ii}(t; u_i, u_i)$$

Démonstration - La relation (3.49) se vérifie directement, d'après la définition des c_{ij} ; (3.50) résulte de la proposition 3.2; en effet

$$(3.51) \quad \sum_{1 \leq j \leq i \leq p} c_{ij}(t; u_j, u_i) = \sum_{1 \leq j \leq i \leq p} a_{ij}(t; u_j, u_i) - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq p-1} a_{ii}(t; u_i, u_i),$$

$$(3.52) \quad \sum_{p \leq j \leq i \leq 2p-1} c_{ij}(t; u_j, u_i) = \sum_{1 \leq j \leq i \leq p} a_{ji}(t; u_j, u_j) - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq p-1} a_{ii}(t; u_i, u_i).$$

Schéma

La proposition 3.3 montre que si l'on utilise le schéma défini au 2° avec les formes $c_{ij}(t; u, v)$, on obtient une solution approchée qui converge (cf. Théorème 3.4).

Théorème 3.5

La méthode des pas fractionnaires définie ci-dessus appliquée au problème du Chap.II §I, lorsque la forme $a(t; u, v)$ (à partie principale hermitienne) vérifie l'hypothèse 3.2, donne une solution approchée $u_h(t)$ qui sous la condition (3.8) converge vers la

| solution exacte $u(t)$ dans $L_2 (0, T \rightarrow X)$ et
 $L^\infty (0, T \rightarrow H)$ forte.

Montrons sur un exemple ($p=2$), comment s'emploie la méthode :

Exemple 3.7

Supposons que l'hypothèse 3.2 soit vérifiée avec $p=2$; soit $A_{i,j,h}^n$ les opérateurs associés aux formes $a_{ij}(t; u, v)$.

Alors

$$(3.53) \quad (A_{ijh}^n u_h, v_h) = (u_h, A_{jih}^n v_h) \quad (1 \leq i, j \leq 2).$$

La solution approchée se définit par

$$(3.54) \quad u_h^0 = q_h u_0$$

$$(3.55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k} [u_h^{n+1/3} - u_h^n] + \frac{1}{2} A_{11h}^{n+1} u_h^{n+1/3} + B_h^{n+1} u_h^n = f_h^{n+1} \\ \frac{1}{k} [u_h^{n+2/3} - u_h^{n+1/3}] + A_{21h}^{n+1} u_h^{n+1/3} + A_{22h}^{n+1} u_h^{n+2/3} = 0 \\ \frac{1}{k} [u_h^{n+1} - u_h^{n+2/3}] + A_{12h}^{n+1} u_h^{n+2/3} + \frac{1}{2} A_{11h}^{n+1} u_h^{n+1} = 0 \end{array} \right.$$

Remarque 3.3

La méthode de démonstration de TEMAM [8] s'étend aux généralisations que nous avons définies, lorsque la forme $b(t; u, v)$ est nulle, et permet de montrer que la condition de stabilité (3.8) n'est pas nécessaire.

Remarque 3.4

Sur ces schémas, cf. SAMARSK II [10]

4° - Généralisation (III) "Méthode des pas fractionnaires symétriques".

Plaçons nous dans le cadre du Chap. II§VI et supposons

Hypothèse 3.3

$$a(t; u, v) = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i(t; u, v)$$

$a_i(t; u, v)$ forme hermitienne, non négative,
de classe C^1 en t et

$$|a_i(t; u, v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad (1 \leq i \leq p)$$

On sait que la solution du schéma implicite ($\theta=1$) converge : $u_h(t) \rightarrow u(t)$ dans V et $\frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)] \rightarrow u'(t)$ dans $L_2(0, T \rightarrow H)$. Cependant, on ne sait pas montrer un résultat analogue pour la solution approchée fournie par la méthode des pas fractionnaires "classique" (du 1°). Une raison peut en être que la perturbation P_h^n (1-13) n'est pas hermitienne.

Nous allons voir que l'application de la méthode des pas fractionnaires définie au (3°) fournit une solution qui a les mêmes propriétés de convergence que celle du schéma implicite standard.

La méthode a déjà été définie; montrons seulement sur un exemple comment elle s'emploie.

Exemple 3.8

Supposons l'hypothèse 3.3 vérifiée avec $p=2$; soit A_{ih}^n ($i=1,2$) les opérateurs définis par les formes $a_i(t;u,v)$. La solution approchée se définit par

$$(3.56) \quad u_h^0 = q_h u_0$$

$$(3.57) \quad \begin{cases} \frac{1}{k} [u_h^{n+1/3} - u_h^n] + \frac{1}{2} A_{1h}^{n+1} u_h^{n+1/3} = f_h^{n+1} \\ \frac{1}{k} [u_h^{n+2/3} - u_h^{n+1/3}] + A_{2h}^{n+1} u_h^{n+2/3} = 0 \\ \frac{1}{k} [u_h^{n+1} - u_h^{n+2/3}] + \frac{1}{2} A_{1h}^{n+1} u_h^{n+1} = 0 \end{cases}$$

Ainsi cette méthode est la même que celle (classique) du (1°) pour la décomposition "symétrique"

$$a(t;u,v) = \frac{1}{2} a_1(t;u,v) + a_2(t;u,v) + \frac{1}{2} a_1(t;u,v)$$

Dans le cas général, on vérifie facilement

Proposition 3.4

La méthode des pas fractionnaires "symétriques", définie ci-dessus, est caractérisée par les équations

$$(3.58) \quad u_h^0 = q_h u_0$$

$$(3.59) \quad \frac{1}{k} [u_h^{n+1} - u_h^n] + A_h^{n+1} u_h^{n+1} + P_h^{n+1} u_h^{n+1} = f_h^{n+1}$$

$$(3.60) \quad I + kA_h^{n+1} + kP_h^{n+1} = \prod_{1 \leq j \leq p-1} (I + \frac{k}{2} A_{jh}^{n+1}) (I + kA_{ph}^{n+1}) \prod_{1 \leq j \leq p-1} (I + \frac{k}{2} A_{jh}^{n+1})$$

Proposition 3.5

L'opérateur de perturbation P_h^n , défini par (3.60)

vérifie les conditions d'application du théorème 1.1.

De plus, sous l'hypothèse fondamentale 1-2,

$$(3.61) \quad \left| \left(\frac{1}{k} [P_h^{n+1} - P_h^n] u_h, v_h \right) \right| \leq M \|u_h\| \|v_h\|$$

$$(3.62) \quad \left| \left(\frac{1}{k} [P_h^{n+1} - P_h^n] u_h, q_h v \right) \right| \leq \varepsilon(h, v) \|u_h\|$$

quels que soient h , u_h et v_h dans V_h et $\varepsilon(h, v)$ tend vers zéro avec h , pour v fixé dans V .

Démonstration - On vérifie sur la forme (1.13) de P_h , à l'aide de la proposition 1-2 que

$$\left| \left(\frac{1}{k} [P_h^{n+1} - P_h^n] u_h, q_h v \right) \right| \leq M \|u_h\| k \sum_{1 \leq i \leq p} \left\{ \|A_{ih}^{n+1} q_h v\| + \left\| \frac{1}{k} (A_{ih}^{n+1} - A_{ih}^n) q_h v \right\| \right\}$$

En utilisant la régularité de $a_i(t; u, v)$,

$$([A_{ih}^{n+1} - A_{ih}^n] q_h v, w_h) = \frac{1}{k} \int_{t-k}^{(n+1)k} \int_{t-k}^t a'(s; q_h v, w_h) ds dt,$$

On voit que (cf. (1-14) et (1.15))

$$\|[A_{ih}^{n+1} - A_{ih}^n] q_h v\| \leq M k \sigma(h) \|q_h v\|$$

et que

$$\frac{1}{k\sigma(h)} \|[A_{ih}^{n+1} - A_{ih}^n] q_h v\| \rightarrow 0.$$

Lemme 3.3

Soit H un espace de Hilbert et A_i ($1 \leq i \leq p$) des opérateurs linéaires continus sur H , hermitiens, non négatifs et où

$$(3.63) \quad A_i = A_{p+1-i} \quad (1 \leq i \leq p)$$

alors l'opérateur

$$(3.64) \quad B = \sum_{\substack{1 \leq r \leq p \\ 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq p}} A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_r}$$

est hermitien, non négatif et il existe δ positif, ne dépendant que de la norme des A_i et de p , tel que

$$(3.65) \quad (Bu, u) \geq \delta \sum_{1 \leq i \leq p} (A_i u, u)$$

Démonstration — Remarquons que

$$(3.66) \quad B = (I + A_1) (I + A_2) \dots (I + A_p) - I$$

(I opérateur unité) de sorte qu'il est clair que

B est hermitien et la relation

$$(3.67) \quad B = (I + A_1) [(I + A_2) \dots (I + A_{p-1}) - I] (I + A_1) + 2 A_1 + (A_1)^2$$

permet, sans aucune difficulté, de démontrer par récurrence la non-négativité de B . Pour montrer (3.65), le résultat étant évident pour $p=1$ et $p=2$, supposons le vrai pour $p-2$: soit δ , positif tel que

$$((I + A_2) \dots (I + A_{p-1}) u, u) - |u|^2 \geq \delta \sum_{2 \leq i \leq p-1} (A_i u, u).$$

La relation (3.67) donne alors

$$(B u, u) \geq 2 (A_1 u, u) + |A_1 u|^2 + \delta \sum_{2 \leq i \leq p-1} (A_i [I + A_1] u, [I + A_1] u)$$

et, en prenant δ suffisamment petit, on obtient une minoration de la forme (3.65)

Corollaire 3.3

Il existe une fonction positive, $\delta(\xi)$, telle que les opérateurs A_h^n et P_h^n définis aux équations (3.-59) et (3-60) vérifient

$$(3.68) \quad ([A_h^n + P_h^n] u_h, u_h) \geq \delta (k \sigma(h)^2) \|u_h\|^2$$

.../...

Théorème 3.6

Si le problème (chap. II, §I) satisfait l'hypothèse 3.3, sous la condition de stabilité (3.8), la solution approchée donnée par la méthode des pas fractionnaires "symétriques" définie par la Prop. 3.4 vérifie la majoration

$$(3.69) \quad \int_0^T \frac{1}{k^2} |u_h(t) - u_h(t-k)|^2 dt + \max_{t \in (0, T)} \|u_h(t)\|^2 \leq \text{constante.}$$

Démonstration - Il suffit de procéder sur (3.59) comme on a fait au chap. II, §VI : on fait le produit scalaire (de H) de (3.29) et de $\frac{1}{k} [u_{n+1} - u_n]$ et, en utilisant la proposition 3.5 et le corollaire 3.3, on obtient la majoration a priori (3.69).

Corollaire 3.4

$u_h \rightarrow u$ dans $L_\infty(0, T; X)$ * faible

$\frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)] \rightarrow u'(t)$ dans $L_2(0, T; H)$ faible

Il reste à montrer la convergence forte, comme au chap. II, §VI.

Théorème 3.7

Dans les conditions d'application du théorème 3.6, la solution approchée donnée par la méthode des pas fractionnaires "symétriques" (cf. Prop. 3.4) converge :

.../...

$$\left\{ \begin{array}{l} u_h \rightarrow u \text{ dans } L_\infty (0, T \rightarrow H) \text{ fort} \\ u_h \rightarrow u \text{ dans } L_\infty (0, T \rightarrow X) * \text{ faible} \\ u_h(t) \rightarrow u(t) \text{ dans } X \text{ fort } t \in (0, T) \\ \frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)] \rightarrow u'(t) \text{ dans } L_2 (0, T \rightarrow H) \text{ fort} \end{array} \right.$$

Démonstration - Seuls les deux derniers points restent à montrer; on procède comme au chap. II, §VI. Considérons, pour $t \in](n-1)k, nk]$, l'expression

$$(3.70) \left\{ \begin{array}{l} \Psi_h(t) = \int_0^{nk} \left| \frac{u_h(s) - w_h(s) - u_h(s-k) + w_h(s-k)}{k} \right|^2 ds + \\ + \frac{1}{2} ([A_h^n + P_h^n] (u_h^n - w_h^n), u_h^n - w_h^n) \end{array} \right.$$

où w_h est la solution approchée donnée par le schéma implicite ($\theta=1$). Comme au chap. II, Prop. 6-2, on montre que (*)

$$(3.71) \left\{ \begin{array}{l} \limsup_{h \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{nk} \left| \frac{u_h(s) - u_h(sk)}{k} \right|^2 ds + \frac{1}{2} ([A_h^n + P_h^n] u_h^n, u_h^n) \right\} \leq \\ \leq \int_0^t |u'(s)|^2 ds + \frac{1}{2} a(t; u(t)) \end{array} \right.$$

(on utilise ici la Prop. 3.5 et la convergence forte dans $L_2 (0, T \rightarrow X)$ pour éliminer les termes de perturbation).

Les autres termes se transforment simplement, en utilisant le théorème 3.5, la proposition 3.5 et les résultats de convergence de w_h et en combinant avec (3.71), on obtient

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \left\{ \Psi_h(t) + \operatorname{Re} a(t; u_h(t), u(t)) \right\} \leq a(t; u(t)).$$

La démonstration se termine alors comme au chapitre II.

*) Comme antérieurement $a(t; u)$ désigne $a(t; u, u)$

IV - LA METHODE DES DIRECTIONS ALTERNÉES (deux directions).

- 64 -

1° - Schéma

Nous avons su montrer pour la méthode des pas fractionnaires des résultats généraux permettant de traiter certaines classes de problèmes paraboliques. Dans le cas de la méthode des directions alternées, on ne sait montrer de résultats intéressants que pour $p = 2$.

Reprenons le problème et les notations du Chap. II, § I et supposons

Hypothèse 4-1

$$(4.1) \quad \begin{cases} a(t; u, v) = a_1(t; u, v) + a_2(t; u, v) + b(t; u, v) \\ |a_i(t; u, v)| \leq M ||u|| ||v|| \quad (i=1, 2) \\ \operatorname{Re} a_i(t; u, u) \geq -M |u|^2 \quad (i=1, 2) \\ \operatorname{Re} \{a_1(t; u, u) + a_2(t; u, u)\} \geq \alpha ||u||^2 - M |u|^2 \quad (\alpha > 0) \end{cases} \quad (*)$$

Remarque 4.1 - De l'hypothèse faite résulte

$$(4.2) \quad |b(t; u, v)| \leq M ||u|| ||v||;$$

par la suite nous serons conduit à faire des hypothèses restrictives supplémentaires.

Exemple 4.1

La méthode des directions alternées s'applique pratiquement à des problèmes d'évolution dans un espace à deux dimensions. Reprenons l'exemple 1.1, avec $p=2$.

(*) M désigne des constantes non nécessairement identiques.

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, X l'espace $[L_2(\Omega)]^3$, d'élément générique $u = (u_0, u_1, u_2)$ on pose

$$(u, v) = \int_{\Omega} u_0(x, y) \bar{v}_0(x, y) dx dy;$$

$H^1(\Omega)$ est identifié au sous espace formé de $(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$.

On se donne une famille de fonctions

$$a_{ij}(t; x, y) \in L^\infty((0, T) \times \Omega) \quad (0 \leq i, j \leq 2)$$

vérifiant

$$(4.3) \operatorname{Re} \{a_{11} |\xi|^2 + a_{12} \eta \bar{\xi} + a_{21} \xi \bar{\eta} + a_{22} |\eta|^2\} \geq \alpha \{|\xi|^2 + |\eta|^2\}$$

($\alpha > 0$), quels que soient ξ, η dans $\mathbb{C}, t, x, y$.

Sur $X \times X$ on définit les formes

$$(4.4) a_{ij}(t; u, v) = \int_{\Omega} a_{ij}(t; x, y) u_j(x, y) \bar{v}_i(x, y) dx dy$$

$$(4.5) a(t; u, v) = \sum_{0 \leq i, j \leq 2} a_{ij}(t; u, v)$$

Le problème parabolique (chap. II, § I) s'écrit

$$u(0) = u_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} - \\ - \frac{\partial}{\partial x} (a_{10} u) - \frac{\partial}{\partial y} (a_{20} u) + a_{01} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{02} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{00} u = f \end{array} \right.$$

avec des conditions aux limites correspondant aux choix de

V . L'hypothèse 4.1 est vérifiée en prenant

$$(4.6) a_i(t; u, v) = a_{ii}(t; u, v) \quad (i=1, 2)$$

Approximation

Les q_h (chap. I, § V) permettent de définir comme au chap. II, § II des opérateurs A_h^n, A_{ih}^n, B_h^n ayant des propriétés analogues à celles de l'hypothèse 4.1.

La méthode des directions alternées que nous allons étudier dans ce paragraphe est une variante de celle que nous avons introduite précédemment (pour laquelle on peut obtenir des résultats voisins).

Soit $u_h(t)$ la solution approchée définie (pour k assez petit) par les équations

$$(4.7) \quad u_h^0 = q_h u_0$$

$$(4.8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{k} [u_h^n - u_h^{n-1}] + A_{2h}^n u_h^n + A_{1h}^n [u_h^n + k(A_{2h}^n u_h^n - A_{2h}^{n-1} u_h^{n-1})] + \\ & + B_h^n u_h^{n-1} = f_h^n \end{aligned} \right.$$

2° - Egalité d'énergie

Avant de faire des hypothèses sur $b(t; u, v)$, nous allons obtenir une relation d'énergie en faisant le produit scalaire (dans H) de (4.8) et de l'argument $\hat{u}_h^n$ de A_{1h}^n . on obtient sans difficulté

$$(4.9) \quad \hat{u}_h^n = u_h^n + k A_{2h}^n u_h^n - k A_{2h}^{n-1} u_h^{n-1}$$

$$(4.10) \quad \left[\frac{1}{2k} \left\{ |u_h^n|^2 - |u_h^{n-1}|^2 + |k A_{2h}^n u_h^n|^2 - |k A_{2h}^{n-1} u_h^{n-1}|^2 + |u_h^n - u_h^{n-1}|^2 \right\} + \right. \\ \left. + \operatorname{Re} \left\{ (A_{2h}^n u_h^n, \hat{u}_h^n) + (A_{1h}^n \hat{u}_h^n, \hat{u}_h^n) + (B_h^n u_h^{n-1}, \hat{u}_h^n) \right\} \right] = \operatorname{Re} (f_h^n, \hat{u}_h^n)$$

Théorème 4.1

Soit $u_h(t)$ et $\hat{u}_h(t)$ les solutions approchées données par les équations (4.8) et (4.9).

Sous l'hypothèse 4.1 et la condition supplémentaire

$$(4.11) \quad |b(t; u, v)| \leq M |u| |v| \quad (\forall t, u, v)$$

on a la majoration a priori suivante :

$$(4.12) \quad \left| \begin{aligned} & \max_{0 \leq t \leq T} \{ |u_h(t)|^2 + |\hat{u}_h(t)|^2 \} + \int_0^T \left\{ \frac{1}{k} |\hat{u}_h(t) - u_h(t-k)|^2 + \right. \\ & \left. + \operatorname{Re} a_2(t; u_h(t), u_h(t)) + \operatorname{Re} a_1(t; \hat{u}_h(t); \hat{u}_h(t)) \right\} dt \leq \\ & \leq C^{st} \{ 1 + |k A_{2h}^0 u_h^0|^2 \} \end{aligned} \right|$$

(la démonstration résulte de (4.10), à l'aide des techniques de majorations classiques).

Remarque 4.2

Ce théorème^{se} démontre sans utiliser l'hypothèse fondamentale

$$(4.13) \quad k \sigma(h)^2 \leq \text{constante.}$$

Cependant, pour déduire de (4.12) une propriété de stabilité il faut que

$$(4.14) \quad |k A_{2h}^0 u_h^0| \leq \text{constante,}$$

et lorsque la forme $a_2(t; u, v)$ est quelconque (à coefficients non réguliers), et u_0 est quelconque dans H , si l'on définit u_h^0 par (4.7), la relation (4.14) n'est satisfaite que sous la condition (4.13).

Remarque 4.3 On pourrait employer, dans le cas $b(t; u, v) = 0$, les méthodes de TEMAM[8] et obtenir la convergence de la solution approchée, sans nécessiter (4.13) mais avec, cependant, une condition de régularité sur u_0 et $a_2(t; u, v)$.

Corollaire 4.1

Dans les conditions d'application du théorème 4-1, sous la condition de stabilité (4.13) et si l'on suppose aussi

$$(4.15) \quad \operatorname{Re} a_2(t+k; u, u) \leq M \operatorname{Re} a_2(t; u, u)$$

(quel que soit k assez petit et pour tout u dans X),

La solution approchée définie par le schéma (4.7)(4.8) est stable :

$$\max_{0 \leq t \leq T} |u_h(t)|^2 + \int_0^T \left\{ \frac{1}{k} |u_h(t-k) - \hat{u}_h(t)|^2 + ||u_h(t)||^2 \right\} dt \leq C^t.$$

(démonstration immédiate).

Corollaire 4-2

Les hypothèses sont celles du corollaire 4.1; alors la solution approchée $u_h(t)$ définie par les équations (4.7) et (4.8) converge vers la solution exacte $u(t)$:

$$u_h \rightarrow u \text{ dans } L^\infty(0, T \rightarrow H) \text{ fort}$$

$$u_h \rightarrow u \text{ dans } L_2(0, T \rightarrow X) \text{ fort}$$

Démonstration - En procédant comme pour le théorème 3.2, il suffit de montrer, w_h^n étant la solution approchée donnée par le schéma implicite ($\theta=1$) du chap. II, que

$$k \sum_{nk \leq T} \{ (kA_{1h}^n [A_{2h}^n w_h^n - A_{2h}^{n-1} w_h^{n-1}], \hat{u}_h^n) + (B_h^n [w_h^n - w_h^{n-1}], \hat{u}_h^n) \} \rightarrow 0$$

Or ceci résulte de la stabilité (corollaire 4.1), de la convergence forte de $w_h(t)$ et du théorème 1.1.

Exemple 4.2.

Supposons dans l'exemple 4.1, les termes de dérivées mixtes nuls ($a_{12} = a_{21} = 0$); alors en prenant

$$a_i(t; u, v) = a_{i1}(t; u, v) + a_{01}(t; u, v) + a_{i0}(t; u, v) +$$

$$+ \frac{1}{2} a_{00}(t; u, v) \quad (i=1, 2), \text{ et}$$

$$b(t; u, v) = 0$$

l'hypothèse 4.1 (et la condition (4.15)) sont vérifiées.

.../...

3° - Cas d'opérateurs comportant des dérivées mixtes

On peut affaiblir notablement la condition (4.11), sans perdre la stabilité du schéma (4.7). Nous supposons

Hypothèse 4.2

Il existe δ positif et, pour tout ε positif, $M(\varepsilon)$ tels que

$$(4.16) \quad |b(t;u,v)| \leq (1-\delta)\{a_2(t;u,u)+a_1(t;v,v)\} + \varepsilon\{|u|^2+|v|^2\} + M(\varepsilon)\{|u|^2+|v|^2\}.$$

Exemple 4.3

Dans le cas de l'exemple 4.1, si $a_{21}(t;x,y)$ est nul, l'hypothèse 4.2 est vérifiée en prenant

$$a_1(t;u,v) = a_{11}(t;u,v) \quad (i=1,2)$$

$$b(t;u,v) = \sum_{i=1,2} [a_{0i}(t;u,v)+a_{i0}(t;u,v)] + a_{00}(t;u,v)+a_{12}(t;u,v)$$

En effet la coercivité (4.3) donne

$$|\operatorname{Re}(a_{12} \eta \xi)| \leq [\operatorname{Re}(a_{11})-\alpha] |\xi|^2 + [\operatorname{Re}(a_{22})-\alpha] |\eta|^2$$

et par suite

$$|a_{12}(t;u,v)| \leq (1-\delta) \operatorname{Re}\{a_{11}(t;v,v)+a_{22}(t;u,u)\} \quad (\delta > 0);$$

les autres termes de $b(t;u,v)$ correspondent à des dérivées d'ordre inférieur et (4.16) se vérifie facilement.

Exemple 4.4

Plus généralement, ces circonstances se rencontrent lorsque la partie principale de l'opérateur elliptique peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m a_{11} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m + \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m a_{12} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^m + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^m a_{22} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^m$$

avec des conditions aux limites convenables.

En particulier tous les problèmes paraboliques, dans un espace à deux dimensions, à coefficients réguliers, avec condition de Dirichlet au bord sont de ce type.

Majoration a priori

Utilisons dans l'égalité d'énergie (4.10) la majoration

$$(4.17) \left[|(B_h^n u_h^{n-1}, \hat{u}_h^n)| \leq (1-\delta) \{a_2^n(u_{n-1}) + a_1^n(\hat{u}_n)\} + \varepsilon \{ \|u_{n-1}\|^2 + \|\hat{u}_n\|^2 \} + M(\varepsilon) \{ \|u_{n-1}\|^2 + \|\hat{u}_n\|^2 \} \right]$$

(où pour simplifier l'écriture, u_n désigne u_h^n et $a_i^n(u_n)$ désigne $\text{Re}(A_{ih}^n u_h^n, u_h^n)$) et le

Lemme 4-1 Sous la condition (4.13), il existe η positif, indépendant de h , tel que

$$(4.18) \left[\frac{1}{2k} \|\hat{u}_n - u_{n-1}\|^2 + \delta a_2^n(u_{n-1}) + \delta a_1^n(\hat{u}_n) \geq \eta \left\{ \frac{1}{k} \|\hat{u}_n - u_{n-1}\|^2 + \|u_{n-1}\|^2 + \|u_n\|^2 \right\} \right]$$

Pour obtenir

$$(4.19) \left\{ \frac{1}{2k} \{ \|u_n\|^2 - \|u_{n-1}\|^2 + \|k A_{2h}^n u_{n-1}\|^2 - k A_{2h}^{n-1} u_{n-1}^2 \} + \eta \left\{ \frac{1}{k} \|\hat{u}_n - u_{n-1}\|^2 + \|u_{n-1}\|^2 \right\} + a_2^n(u_n) - a_2^n(u_{n-1}) \leq M \{ \|f_n\|^2 + \|u_{n-1}\|^2 \} \right\}$$

Théorème 4.2

Sous les hypothèses 4.1 et 4.2, si la condition de stabilité (4.13) est vérifiée et si la forme $a_2(t; u, v)$ satisfait la relation

$$(4.20) \quad |a_2(t; v, v) - a_2(t-k; v, v)| \leq \varepsilon(k) \|v\|^2 \quad (\forall v, t)$$

($\varepsilon(k)$ tendant vers zéro avec k), la solution approchée donnée par la méthode des directions

alternées (4.8) est stable :

$$\max_{0 \leq t \leq T} |u_h(t)|^2 + \int_0^T ||u_h(t)||^2 dt \leq \text{constante}$$

Démonstration - Il suffit de remarquer que (4.20) donne

$$|a_2^{n+1}(u_n) - a_2^n(u_n)| \leq \varepsilon(k) ||u_n||^2$$

et défectuer la sommation de (4.19) suivant les techniques classiques.

Remarque 4.4 - La condition de continuité (4.20) n'est pas nécessaire; la continuité par morceaux, où même des hypothèses moins fortes, sont suffisantes.

Corollaire 4.3 - Dans les conditions d'application de théorème 4.2, la solution approchée $u_h(t)$ converge vers la solution $u(t)$ du problème (chap. II; § I) dans $L_2(0, T \rightarrow X)$ fort et $L^\infty(0, T \rightarrow H)$ fort.

Démonstration : on emploie la technique qui a servi déjà plusieurs fois, en introduisant la solution du schéma implicite ($\theta=1$) et en utilisant sa convergence forte et le théorème 1.1.

4° Une classe de schémas

Revenons au problème et aux schémas du chap. II

$$(4.21) \quad \frac{1}{k} [u_h^n - u_h^{n-1}] + A_h^n [\theta u_h^n + (1-\theta)u_h^{n-1}] = f_h^n$$

Hypothèse 4.3

La forme $a(t; u, v)$ du chap. II, § I, vérifie les relations $a(t; u, v) = a_1(t; u, v) + a_2(t; u, v)$

$$\operatorname{Re} a_1(t; u, u) \geq -M |u|^2$$

$$|a_1(t; u, v)| \leq M ||u|| ||v||$$

.../...

Schémas

La méthode des directions alternées définie au § I, lorsqu'on l'applique à (4.21) donne les schéma

$$(4.22) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{k} [u_h^n - u_h^{n-1}] + A_{2h}^n [\theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1}] + \\ & + A_{1h}^n [\theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1} + k \theta^2 A_{2h}^n (u_h^n - u_h^{n-1})] = f_h^n \end{aligned} \right.$$

Remarque 4-5 On peut montrer, lorsque les données sont très régulières que le terme de perturbation $k A_{1h}^n A_{2h}^n (u_h^n - u_h^{n-1})$ est (si l'on ne tient pas compte de l'ordre d'approximation en h) infiniment petit d'ordre $O(k^2)$. On sait (sans vouloir donner une parfaite rigueur à cette affirmation) que le schéma de Crank-Nicolson ($\theta=1/2$) a une erreur en t de l'ordre de $O(k^2)$; Alors la méthode des directions alternées (4.22), dans le cas $\theta=1/2$, conserve cette précision. C'est sans doute son avantage sur la méthode des pas fractionnaires. Pour $\theta \neq 1/2$, les deux méthodes ont des erreurs en $O(k)$.

Egalité d'énergie

Le produit scalaire de (4.22) et de l'argument

$$(4.23) \quad \hat{u}_h^n = \theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1} + k A_{2h}^n (u_h^n - u_h^{n-1})$$

de A_{1h}^n donne facilement (avec des conventions d'écriture évidentes) l'égalité

$$(4.24) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2k} \{ |u_n|^2 - |u_{n-1}|^2 + |k \theta A_2^n u_n|^2 - |k \theta A_2^n u_{n-1}|^2 \} + \\ & + \frac{2\theta-1}{2k} \{ |u_n - u_{n-1}|^2 + |k \theta A_2^n (u_n - u_{n-1})|^2 \} + \end{aligned} \right.$$

.../...

$$\left| +\theta^2 a_2^n (u_n - u_{n-1}) + a_2^n (\theta u_n + (1-\theta)u_{n-1}) + a_1^n (\hat{u}_n) = \operatorname{Re} (f_n, \hat{u}_n) \right|$$

Majoration a priori

Pour déduire de (4.24) une majoration a priori, il faut évaluer la différence

$$(4.25) \quad |A_2^{n+1} u_n|^2 - |A_2^n u_n|^2 = \operatorname{Re} ([A_2^{n+1} - A_2^n] u_n, [A_2^{n+1} + A_2^n] u_n)$$

Lemme 4.2

Si la forme $a_2(;u,v)$ vérifie les conditions (*)

$$(4.26) \quad |a_2(t;u,v)| \leq M \{a_2(t;u) + a_2(t;v) + |u|^2 + |v|^2\}$$

$$(4.27) \quad |a_2(t+k;u,v) - a_2(t;u,v)| \leq \varepsilon \{a_2(t;u) + a_2(t;v)\} + M(\varepsilon) \{|u|^2 + |v|^2\}$$

pour k assez petit, où ε , positif, est arbitraire, et

si la condition (4.13) est satisfaite, on a la

majoration (pour k assez petit)

$$(4.28) \quad k | |A_2^{n+1} u_n|^2 - |A_2^n u_n|^2 | \leq \eta a_2^n(u_n) + M(\eta) |u_n|^2$$

où η , positif, peut-être fixé arbitrairement.

(démonstration technique facile).

Lemme 4.3

Sous les hypothèses précédentes, il existe δ et M , positifs, indépendants de h , tels que, pour $\theta \geq 1/2$, la solution u_n de (4.22) vérifie la majoration (pour k assez petit)

$$(4.29) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2k} \{ |u_n|^2 - |u_{n-1}|^2 + |k\theta A_2^n u_n|^2 - |k\theta A_2^{n-1} u_{n-1}|^2 \} + \\ & + \delta \{ a_2^n(u_n) + a_1^n(\hat{u}_n) \} \leq M \{ |f_n|^2 + |u_n|^2 + |u_{n-1}|^2 \} \end{aligned} \right.$$

Démonstration : il suffit de remarquer qu'il existe une constante positive δ telle que

(*) Pour abréger, on pose $a_2(t;u) = \operatorname{Re} a_2(t;u,u)$

.../...

$$(4.30) \left[\begin{aligned} a_2(t; \theta u + (1-\theta)v) + a_2(t; u-v) &\geq \delta \{ a_2(t; u) + a_2(t; v) \} - \\ &- M \{ |u|^2 + |v|^2 \} \end{aligned} \right.$$

(ceci n'utilise que l'hypothèse 4.3) et d'appliquer le lemme 4.2, à l'égalité (4.24).

Il est alors facile de montrer, par les procédés habituels de sommation

Théorème 4.3

Soit $u_h(t)$ la solution approchée donnée par le schéma (4.22) et la condition initiale

$$u_h^0 = q_h u_0.$$

Supposons l'hypothèse 4.3 vérifiée, ainsi que les conditions (4.26) et (4.27) alors, sous la condition de stabilité (4.13), on a, pour $\theta \geq 1/2$,

$$\max_{0 \leq t \leq T} |u_h(t)|^2 + \int_0^T \{ a_2(t; u_h(t)) + a_1(t; \hat{u}_h(t)) \} dt \leq C^{ste}$$

Lemme 4.4

On suppose l'hypothèse 4.3 et les conditions (4.13) et (4.26) satisfaites; alors il existe des constantes positives δ , M telles que

$$\left[\begin{aligned} a_2(t; u_h(t)) + a_1(t; \hat{u}_h(t)) &\geq \delta |u_h(t)|^2 - \\ &- M \{ |u_h(t)|^2 + |u_h(t-k)|^2 \} \end{aligned} \right.$$

Théorème 4.4

Dans les conditions d'application du théorème 4.3, la solution approchée $u_h(t)$ donnée par la méthode des directions alternées converge vers la solution $u(t)$ du problème (ch.II. § I) dans $L^\infty(0, T; H)$ fort et $L_2(0, T; X)$ fort.

Démonstration : comme dans les paragraphes précédents, on introduit la solution approchée fournie par le schéma (4.21), dont on connaît la convergence forte. On majore l'écart entre les deux solutions approchées à l'aide des lemmes précédents et on termine comme pour la démonstration du théorème 4.3, en utilisant le théorème 1.1.

Remarque 4.6

Le théorème 4.4 est surtout intéressant pour $\theta = 1/2$ (cf. remarque 4.5)

Remarque 4.7

On peut affaiblir la condition (4.26), en supposant qu'elle est satisfaite sauf en un nombre fini de points.

Exemple 4.5

Dans le cas de l'exemple 4.2, l'hypothèse 4.3 est vérifiée si la fonction $a_{22}(t; xy)$ est continue en t . (En fait la continuité par morceaux suffit).

Remarque 4.8

Sur ces schémas, cf. DOUGLAS [6]

V Une méthode à perturbations positives

1° - Nous avons vu que la méthode des directions alternées, à deux directions, conduisait à un schéma de la forme

$$(5.1) \quad \frac{1}{k} [u_{n+1} - u_n] + (A_1 + A_2)u_{n+1} + k A_1 A_2 (u_{n+1} - u_n) = f$$

et lorsque l'opérateur de perturbation, $k A_1 A_2$, est non négatif, (comme dans le cas "commutatif", § II-2°) on obtient très facilement la stabilité.

Lorsque l'opérateur A , défini par la forme $a(t;u,v)$ est hermitien, une décomposition telle que

$$(5.2) \quad A_2 = A_1^*$$

donne l'opérateur de perturbation, $k A_1 A_1^*$, hermitien non négatif.

En s'appuyant sur ces remarques, on peut imaginer des schémas stables, faciles à traiter numériquement et permettant d'approcher (au moins théoriquement) tous les problèmes paraboliques du chap. II, § I.

La seule difficulté est celle de la convergence (et aussi de la précision).

2° - Résultats généraux

Hypothèse 5.1

(i) Les données sont celle du chap. II, § I-II; on suppose que la forme $a(t;u,v)$ est hermitienne et indépendante de t . (ii) Nous nous donnons une décomposition de l'opérateur A_h de la forme ⁽¹⁾

$$(5.4) \quad A_h = T_h^* + T_h$$

Schéma

Proposition 5.1

Les équations

$$(5.5) \quad u_h^0 = q_h u_0$$

$$(5.6) \quad \frac{1}{k} [u_h^{n+1/2} - u_h^n] + T_h^* u_h^{n+1/2} + T_h u_h^n = f_h^{n+1}$$

$$(5.7) \quad \frac{1}{k} [u_h^{n+1} - u_h^n] + T_h^* u_h^{n+1/2} + T_h u_h^{n+1} = f_h^{n+1}$$

définissent (pour k assez petit) une solution approchée (unique) u_h^n , (i.e, $u_h(t)$), vérifiant

$$(5.8) \quad \frac{1}{k} [u_h^{n+1} - u_h^n] + A_h u_h^{n+1} + k T_h^* T_h (u_h^{n+1} - u_h^n) = f_h^{n+1}$$

Démonstration - L'existence et l'unicité de la solution approchée résulte de la relation

$$(5.9) \quad \operatorname{Re} (T_h u_h, u_h) = \operatorname{Re} (T_h^* u_h, u_h) = \frac{1}{2} (A_h u_h, u_h) \geq -M |u_h|^2$$

et (5.8) se déduit directement de (5.6) et (5.7).

Egalité d'énergie

Faisons le produit scalaire (dans H), de (5.8) et de u_h^{n+1} , pour obtenir (avec des notations évidentes).

$$(5.10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2k} \{ |u_{n+1}|^2 - |u_n|^2 + |u_{n+1} - u_n|^2 \} + a(u_{n+1}) + \\ & + \frac{k}{2} \{ |T_h u_{n+1}|^2 - |T_h u_n|^2 + |T_h(u_{n+1} - u_n)|^2 \} = \operatorname{Re}(f_{n+1}, u_{n+1}) \end{aligned} \right.$$

Par sommation, avec les techniques habituelles, on montre facilement

Proposition 5.2

La solution approchée définie à la proposition 5.1, vérifie la majoration a priori (*)

$$(5.11) \quad \left\{ \begin{aligned} & |u_h^N|^2 + k |T_h u_h^N|^2 + k \sum_{n \leq N} \left\{ \|u_h^n\|^2 + \frac{1}{k} |u_h^n - u_h^{n-1}|^2 + k |T_h(u_h^n - u_h^{n-1})|^2 \right\} < \\ & \leq M \left\{ 1 + k |T_h u_h^0|^2 \right\} \end{aligned} \right.$$

(pour Nk borné).

On en déduit immédiatement

Il s'agit ici d'une décomposition de l'opérateur discret A_h et non de la forme $a(t; u, v)$ comme dans les paragraphes précédents. .../...

Proposition 5.3

Sous l'hypothèse supplémentaire

$$(5.12) \quad |k T_h u_h| \leq M |u_h|, \quad \forall u_h \in V_h,$$

la solution approchée $u_h(t)$ est stable :

$$(5.13) \quad \max_{0 \leq s \leq t} |u_h(s)|^2 + \int_0^t ||u_h(s)||^2 ds \leq M(t)$$

Convergence faible

Comme au chapitre II, § IV, faisons le produit scalaire de (5.8) et de $q_h v$ ($v \in V$); par sommation, pour $(n-1) k < t \leq nk$,

on obtient

$$(5.14) \quad \begin{cases} (u_h(t), q_h v) + \int_0^{nk} (s; u_h(s), q_h v) ds + (k^2 T_h^* T_h u_h(t), q_h v) \\ = (u_h^0, q_h v) + \int_0^{nk} (f(s), q_h v) ds + (k^2 T_h^* T_h u_h^0, q_h v) \end{cases}$$

Proposition 5.4.

Aux hypothèses précédentes ajoutons l'hypothèse

$$(5.15) \quad |k T_h q_h v| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0), \quad \forall v \in V.$$

Alors la solution approchée u_h converge faiblement vers la solution exacte u dans $L^\infty(0, T \rightarrow H)$ * faible et $L_2(0, T \rightarrow X)$ faible.

Démonstration — En utilisant la proposition 5.3 et les conditions (5.12) et (5.15), dans l'égalité (5.14), on se ramène à la démonstration donnée au chap. II § IV.

(*) M désigne des constantes, indépendantes de h , non nécessairement égales.

Théorème 5.1

L'hypothèse 5.1 étant vérifiée, on suppose en outre que

$$(5.12) \quad |k T_h v_h| \leq M |v_h|, \quad \forall v_h \in V_h$$

$$(5.13) \quad |k T_h q_h v| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0) \quad \forall v \in H.$$

Alors la solution approchée définie à la proposition 5.1. converge vers la solution exacte du chap. II, § I, dans $L_2(0, T \rightarrow X)$ fort et $L^\infty(0, T \rightarrow H)$ fort.

Démonstration — En revenant à l'égalité d'énergie (5.10), en utilisant la proposition 5.4, on obtient par sommation

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} |u_h(t)|^2 + \operatorname{Re} \int_0^t a(s; u_h(s), u_h(s)) ds \right\} \leq \frac{1}{2} |u_0|^2 + \operatorname{Re} \int_0^t (f(s), u(s)) ds$$

dont on déduit la convergence forte dans $L_2(0, T \rightarrow X)$; puis on montre, comme au chap. II, § V la convergence forte dans $L^\infty(0, T \rightarrow H)$.

Exemple 5.1

Prenons dans l'espace V_h une base orthonormale pour le produit scalaire de H ; A_h est représenté par une matrice hermitienne et on pourra prendre pour T_h la matrice triangulaire supérieure à diagonale réelle vérifiant (5.4) Alors la résolution de (5.6) et (5.7) ne pose pas de difficultés pratiques.

Remarque 5.1

Le théorème 5.1 reste vrai (et se démontre de la même manière) si l'on suppose que la forme hermitienne $a(t; u, v)$ dépend régulièrement de t .

.../...

3°) Exemples

D'après le théorème 5-1, toute la difficulté consiste à vérifier les conditions (5.12) et (5.13). Dans le cas d'une décomposition triangulaire quelconque, telle que nous l'avons définie à l'exemple 5.1, nous ne savons pas si ces conditions sont satisfaites, cependant, dans de nombreux exemples, elles sont faciles à vérifier.

Nous nous plaçons dans le cadre de l'exemple 5.1, c'est à dire, nous supposons

Hypothèse 5.2

On choisit dans V_h une base orthonomale pour le produit scalaire (u,v) et soit T_h la matrice triangulaire (supérieure, à diagonale réelle) définie par

$$A_h = T_h + T_h^*$$

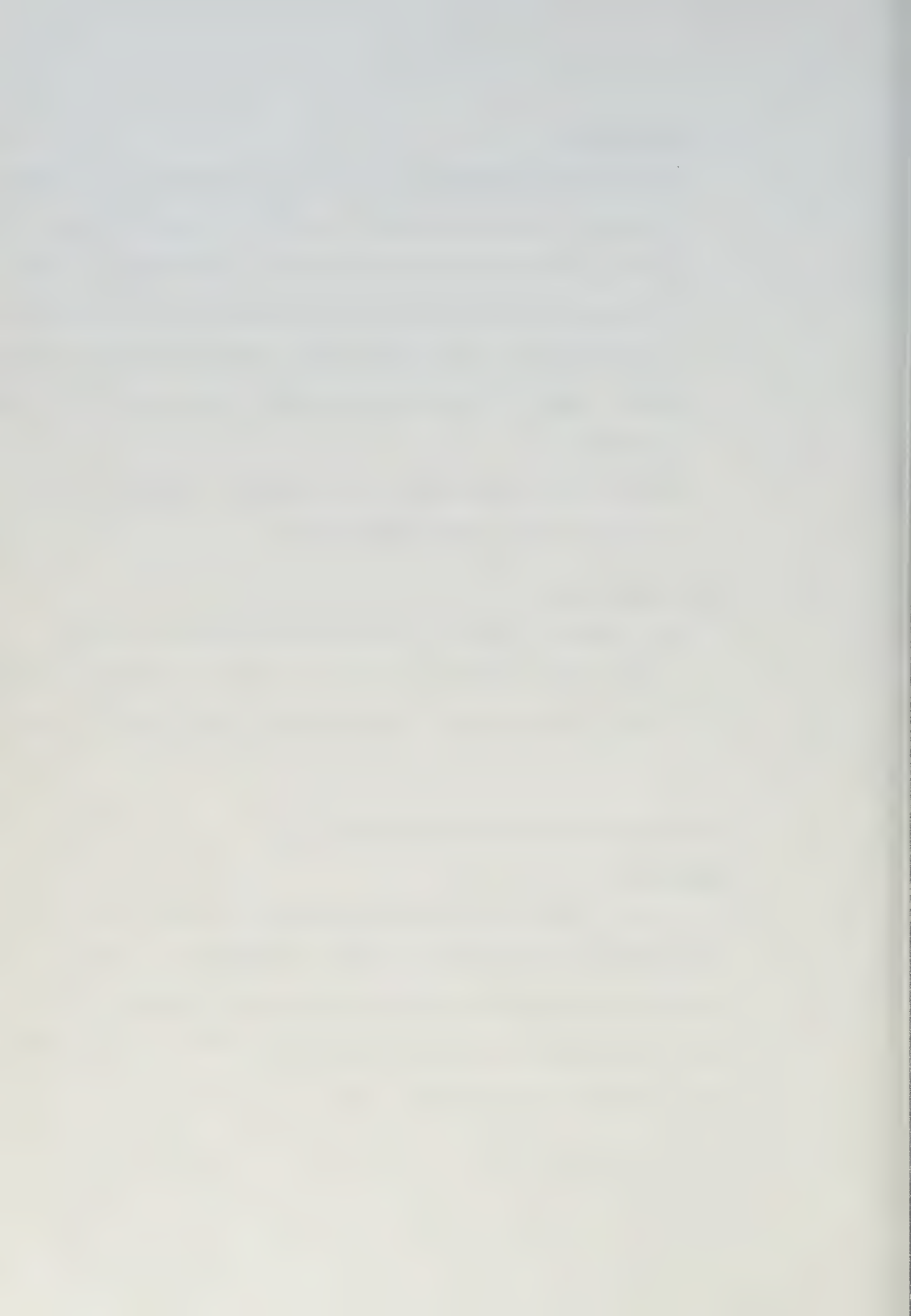
Vérification de la condition (5.12)

Lemme 5.1

Si A est une matrice "bande", c'est à dire dont les éléments non nuls sont de la forme $a_{i,j+i}$ ($i \geq 1$, j pouvant prendre un nombre fini, p , de valeurs), et si $||A||$ désigne la norme de matrice associée à la norme euclidienne des vecteurs, on a

$$(5.14) \quad \max_{i,j} |a_{ij}| \leq ||A|| \leq p^{3/2} \max_{i,j} |a_{ij}|$$

.../...



Démonstration - Par définition

$$||A||^2 = \sup_x \frac{\sum_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right|^2}{\sum_j |x_j|^2}$$

alors les inégalités

$$||A||^2 \geq \max_j \sum_i |a_{ij}|^2 \geq \max_{i,j} |a_{ij}|^2 =$$

et

$$\sum_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right|^2 \leq p^2 \sum_{i,j} |a_{ij} x_j|^2 \leq p^3 \max_{i,j} |a_{ij}|^2 \sum_j |x_j|^2$$

donnent (5.14).

Corollaire 5.1

On suppose, dans l'hypothèse 5.2, que la matrice A_h est une matrice "bande" dont le nombre, p , de "co diagonales" est indépendant de h . Alors, la condition (5.12) est satisfaite si

$$(5.15) \quad k \sigma(h)^2 \text{ borné}$$

Démonstration - En effet, avec les notations du lemme 5.1,

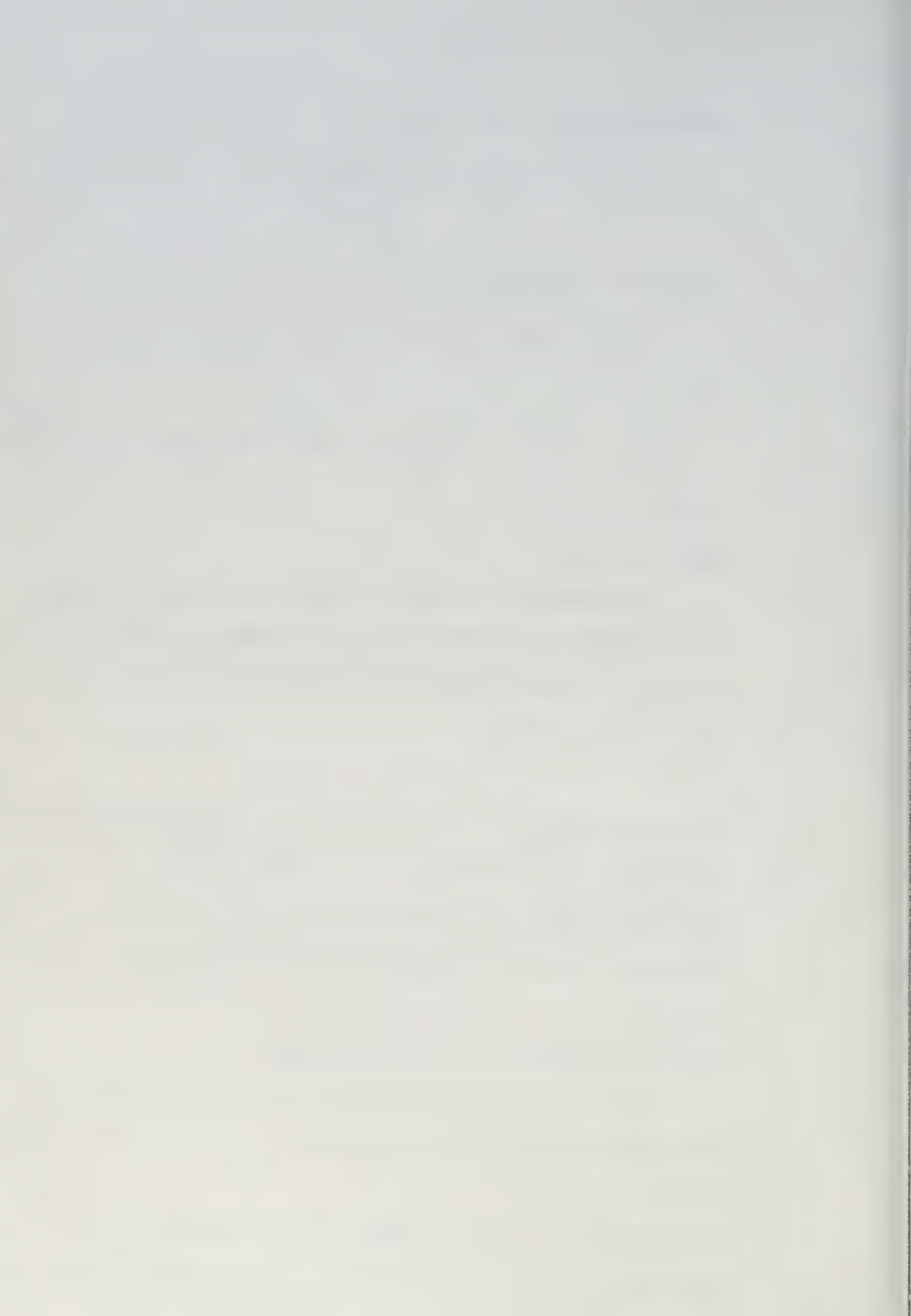
$$||kT_h|| \leq p^{3/2} ||kA_h|| \leq p^{3/2} M k \sigma(h)^2$$

Remarque 5.2 - Le corollaire 5.1 s'applique à tous les exemples pratiques d'approximation des problèmes paraboliques.

Vérification de la condition (5.13)

Nous supposons la condition (5.12) vérifiée et, plus précisément, nous supposons que (5.15) est satisfaite.

Remarque 5.3 - D'après (5.12'), il suffit de vérifier (5.13) pour une famille de fonctions v , dense dans H . Dans tous



les exemples envisagés, H est l'espace $L_2(\Omega)$; il suffit alors de vérifier (5.13) pour des V dans $\mathcal{D}(\Omega)$; on voit que les conditions aux limites n'interviennent pas.

Exemple 5.2

V étant l'espace $H_0^1(0,1)$, soit

$$a(u, v) = \int_0^1 a(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx \quad (a \in L^\infty(0,1)) ;$$

étant donné un découpage de $(0,1)$ en intervalles de longueur h , ($[I+1]h = 1$), on associe à $u(x)$ le vecteur de composantes

$$u_i = \frac{1}{h} \int_{(i-1/2)h}^{(i+1/2)h} u(x) dx. \quad (1 \leq i \leq I)$$

Pour un choix convenable de q_h (cf. CEA [1]), A_h est représenté par la matrice tri-diagonale hermitienne

$$\begin{bmatrix} a_0 + a_1 & & -a_1 & & \\ -a_1 & a_1 + a_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -a_{I-1} & & \\ & & & a_{I-1} + a_I & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

avec $a_i = \frac{1}{h} \int_{ih}^{(i+1)h} a(x) dx.$

Alors, pour u dans $\mathcal{D}(\Omega)$, et h assez petit,

$$|k T_h u|^2 = h \left(\frac{k}{h^2} \right)^2 \sum_i \left| \frac{1}{2} (a_i + a_{i+1}) u_i - a_{i+1} u_{i+1} \right|^2 ;$$

.../...

En utilisant (5.15) et la régularité de $u(x)$, il suffit de montrer

$$h \sum_i |a_i - a_{i+1}|^2 \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0),$$

et ceci résulte de la majoration

$$h \sum_i |a_i - a_{i+1}|^2 \leq 2 \|a(x)\|_{L^\infty(0,1)} \|a(x) - a(x+h)\|_{L_1(0,1)}.$$

Exemple 5.3

Tout se passe comme dans l'exemple précédent, si l'on prend $V = H_0^1(\Omega)$ (Ω ouvert de $\mathbb{R}^p$) et

$$a(u, v) = \int_{\Omega} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx \quad (a_i \in L^\infty(\Omega)).$$

Les conditions aux limites n'intervenant pas, on peut aussi bien prendre $H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$. On peut aussi prendre

$$a(u, v) = \sum_i \int_{\Omega} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx$$

Théorème 5.2

Prenons V , H , q_h comme il est indiqué au chap. I, §III (cf. aussi CEA [1] et soit

$$(5.16) \quad a(u, v) = \sum_{1 \leq i \leq p} \int_{\Omega} a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} a_0(x) u(x) \bar{v}(x) dx$$

où $a_i(x)$ ($0 \leq i \leq p$) est une fonction réelle de $L^\infty(\Omega)$

On suppose que V_h est muni de sa base naturelle (correspondant à l'ordre lexicographique des points) et soit

T_h la matrice triangulaire (supérieure, à diagonale principale réelle) définie dans cette base par

.../...

$$A_h = T_h + T_h^*.$$

Alors les conditions (5.12) et (5.13) du théorème 5.1 sont vérifiées si

$$(5.17) \quad k \sigma(h)^2 \leq C^{ste}.$$

Remarque 5.4

Il n'y a pas de difficulté à étendre ces résultats, au cas de formes $a(u,v)$ elliptiques d'ordre $2m$ et au cas où les fonctions $a_i(t;x)$ dépendent régulièrement de t .

4° Application à la stabilisation

Dans le cas du problème général du chapitre II, on peut "stabiliser" le schéma explicite

$$(5.18) \quad \frac{1}{k} [u_h^{n+1} - u_h^n] + A_h^{n+1} u_h^n = f_h^{n+1}$$

de la manière suivante.

Soit $b(u,v)$ de la forme (5.16) et l'on décompose B_h , comme il est indiqué au théorème 5.2, en

$$(5.19) \quad B_h = T_h + T_h^*.$$

Considérons alors, ρ étant un paramètre réel positif, le schéma

$$(5.20) \quad \frac{1}{k} [u_h^{n+1} - u_h^n] + A_h^{n+1} u_h^n + \rho [B_h + k\rho T_h^* T_h] [u_h^{n+1} - u_h^n] = f_h^{n+1}$$

Théorème 5.3

Les données sont celles du chap. II, § I; on suppose en outre que la forme $b(u,v)$ et la décomposition (5.19) vérifient les conditions d'application du théorème 5.2

Alors on peut trouver ρ , positif, tel que, sous la

condition (5.17), la solution approchée $u_h(t)$, définie par (5.20) (et $u_h^0 = q_h u_0$), converge vers la solution exacte $u(t)$ dans $L_2(0, T \rightarrow X)$ fort et $L_\infty(0, T \rightarrow H)$ fort.

Démonstration. Indiquons seulement comment on obtient la stabilité. En faisant le produit scalaire de (5.20) et de u_h^{n+1} , pour obtenir une majoration a priori, on doit avoir

$$\operatorname{Re} \{ a(t; u, u) + a(t; u, v) + \frac{\rho}{2} b(v, v) \} \geq 0.$$

Si α , β , M sont donnés par

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} a(t; u, u) &\geq \alpha \|u\|^2 \\ |a(t; u, v)| &\leq M \|u\| \|v\| \\ \operatorname{Re} b(v, v) &\geq \beta \|v\|^2 \end{aligned}$$

on prendra

$$(5.21) \quad \rho \geq \frac{M^2}{2\alpha\beta}.$$

A l'aide de (5.17) et (5.21), on obtient facilement la stabilité et le reste de la démonstration est d'une technique habituelle.

CHAPITRE IV - Problèmes linéaires du deuxième ordre en t.

Dans la première partie, nous présentons le problème

$$u''(t) + A(t) u(t) = f(t)$$

$$u(0) = u_0 ; u'(0) = u_1$$

et les résultats de Raviart [2] pour les schémas d'approximation "classiques", que nous complétons par un théorème de convergence forte. Pour ne pas nous étendre trop longuement sur des questions partiellement originales, nous renvoyons à Raviart [2] pour des exemples.

Dans la deuxième partie, nous reprenons la technique du chapitre III, que nous étendons, en partie, aux problèmes du second ordre. Nous donnons brièvement une extension au cas de l'équation

$$u''(t) + B(t) u'(t) + A(t) u(t) = f(t).$$

Temam [8] donne une extension de la méthode des pas fractionnaires d'un type complètement différent.

I Approximation classique.

1° - Formulation du problème.

Avec les données du chap. I, § V, on considère des formes sesquilinéaires $a(t; u, v)$ sur $X \times X$, pour $t \geq 0$, vérifiant

.../...

Hypothèse 1.1.

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t;u,v) \text{ hermitienne} \\ t \mapsto a(t;u,v) \text{ de classe } C^1, \quad \forall u,v \in X. \\ |a(t;u,v)| \leq M \|u\| \|v\| \quad \forall u,v \in X, t \geq 0 \\ a(t;u,u) \geq \alpha \|u\|^2 \quad (\alpha > 0), \quad \forall u \in X, t \geq 0. \end{array} \right.$$

Théorème 1.1 (Lions[3])

$$\begin{array}{l} (1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Sous l'hypothèse 1.1, étant donné } u_0 \in V, u_1 \in H, \\ f \in L_2(0, T; H), \text{ il existe une solution} \\ \text{unique du problème} \\ u \in L_2(0, T; V) \\ u' \in L_2(0, T; H) \\ u(0) = u_0 \\ (u'(t), v) + \int_0^t a(s; u(s), v) ds = (u_1, v) + \\ + \int_0^t (f(s), v) ds, \\ \text{quel que soit } v \text{ dans } V, t \geq 0. \\ \text{De plus la solution } u \text{ appartient à } C(0, T; V), u' \\ \text{appartient à } C(0, T; H) \text{ et on a l'égalité d'énergie} \\ (1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} |u'(t)|^2 + a(t; u(t), u(t)) - \int_0^t a'(s; u(s), u(s)) ds = \\ = |u_1|^2 + a(0; u_0, u_0) + 2 \operatorname{Re} \int_0^t (f(s), u'(s)) ds \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array}$$

Remarque 1.1 $A(t)$ étant l'opérateur linéaire défini par la forme $a(t;u,v)$, l'équation (1.1) est équivalente à

$$(1.3) \quad u'(t) + A(t) u(t) = f(t)$$

.../...

On peut affaiblir l'hypothèse 1.1 en supposant seulement que la partie principale de $A(t)$ vérifie ces conditions. On peut aussi étendre le théorème 1.1 au cas d'une équation de la forme

$$(1.4) \quad u''(t) + B(t) u'(t) + A(t) u(t) = f(t)$$

Les résultats de ce paragraphe s'appliquent, avec des modifications convenables (cf. [2]), à ces cas plus généraux; nous ne les traitons pas pour alléger la présentation.

2° - Schémas d'approximation

Aux hypothèses du chap. I, § V, 2°, ajoutons un découpage du temps en intervalles de longueur k (tendant vers zéro avec h). A toute suite $\{v_0, v_1, \dots, v_n, \dots\}$ d'éléments de X , associons la fonction

$$(1.5) \quad v(t) = v_n \quad \text{pour } (n - \frac{1}{2})k < t \leq (n + \frac{1}{2})k.$$

Définissons les opérateurs A_h^n et les éléments f_h^n de V_h par

$$(1.6) \quad (A_h^n q_h u, q_h v) = a(nk; q_h u, q_h v), \quad \forall u, v \in V$$

$$(1.7) \quad (f_h^n, q_h v) = \frac{1}{k} \int_{(n-\frac{1}{2})k}^{(n+\frac{1}{2})k} (f(t), q_h v) dt, \quad \forall v \in V.$$

L'hypothèse 1.1 donne

Proposition 1.1

Les opérateurs A_h^n vérifient les relations

$$(A_h^n u_h, v_h) = (u_h, A_h^n v_h)$$

$$|(A_h^n u_h, v_h)| \leq M ||\bar{u}_h|| ||v_h||$$

$$(A_h^n u_h, u_h) \geq \alpha ||u_h||^2$$

$$|((A_h^{n+1} - A_h^n) u_h, v_h)| \leq M k ||u_h|| ||v_h||,$$

quels que soient u_h et v_h dans V_h . (Les M désignent des constantes différentes).

Proposition 1.2 (définition des schémas)

a) Il existe une suite unique (u_h^n) vérifiant

$$(1.8) \quad u_h^0 = q_h u_0$$

$$(1.9) \quad u_h^1 = k q_h u_1 + u_h^0$$

$$(1.10) \quad \frac{1}{k^2} [u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}] + \frac{1}{2} A_h^n [u_h^{n+1} + u_h^n] = f_h^n \quad (n \geq 1)$$

b) Il existe une suite unique (u_h^n) vérifiant (1.8),
(1.9) et

$$(1.11) \quad \frac{1}{k^2} [u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}] + A_h^n u_h^n = f_h^n \quad (n \geq 1)$$

Remarque 1.2 - Le premier schéma est implicite et le deuxième explicite, et ils ont même "ordre de troncature". Nous allons étudier la stabilité et la convergence des solutions approchées $u_h(t)$ qu'ils définissent.

3° Egalités d'énergie, stabilité.

Avec des conventions d'écriture évidentes, faisons le produit scalaire (de H) de (1.10) et (1.11) par $u_{n+1} - u_{n-1}$ pour obtenir respectivement

.../...

respectivement (nous abrégons u_h^n par u_n et $a(nk; u, u)$ par $a_n(u)$).

$$(1.12) \quad \left| \frac{u_{n+1} - u_n}{k} \right|^2 - \left| \frac{u_n - u_{n-1}}{k} \right|^2 + \frac{1}{2} \{a_n(u_{n+1}) - a_n(u_{n-1})\} = \operatorname{Re}(f_n, u_{n+1} - u_{n-1}) ;$$

$$(1.13) \quad \left| \frac{u_{n+1} - u_n}{k} \right|^2 - \left| \frac{u_n - u_{n-1}}{k} \right|^2 + \operatorname{Re} \{a_n(u_{n+1}, u_n) - a_n(u_n, u_{n-1})\} = \operatorname{Re}(f_n, u_{n+1} - u_{n-1})$$

En utilisant la régularité de $a(t; u, v)$, on obtient facilement les majorations respectives

$$(1.14) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left| \frac{u_{n+1} - u_n}{k} \right|^2 - \left| \frac{u_n - u_{n-1}}{k} \right|^2 + \frac{1}{2} a_{n+1}(u_{n+1}) - \frac{1}{2} a_{n-1}(u_{n-1}) \leq \\ & \leq |f_n| |u_{n+1} - u_{n-1}| + Mk \{ \|u_{n+1}\|^2 + \|u_{n-1}\|^2 \} , \end{aligned} \right.$$

$$(1.15) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left| \frac{u_{n+1} - u_n}{k} \right|^2 - \left| \frac{u_n - u_{n-1}}{k} \right|^2 + \operatorname{Re} a_{n+1}(u_{n+1}, u_n) - \operatorname{Re} a_n(u_n, u_{n-1}) \leq \\ & \leq |f_n| |u_{n+1} - u_{n-1}| + Mk \|u_{n+1}\| \|u_n\| . \end{aligned} \right.$$

On démontre

Théorème 1.2 (Raviart [2])

Les solutions approchées définies à la proposition 1.2 sont stables,

$$\frac{|u_h(t) - u_h(t-k)|}{k} \leq \text{Cst.} \quad t \in (0, T)$$

$$\|u_h(t)\| \leq C^{\text{st}} \quad t \in (0, T)$$

si, dans le cas du schéma explicite (1.11), la condition de stabilité,

$$(1.16) \quad M k^2 \sigma(h)^2 \leq 4(1-\delta)$$

(δ positif quelconque; M , constante apparaissant dans

l'hypothèse 1.1), est vérifiée.

Remarque 1.3

Dans le cas du schéma implicite (1.10), la démonstration exige que $||u_h^1|| = ||u_0 + q_h u_1||$ soit borné ;

si u_1 est quelconque dans H , cela exige la condition

$$(1.17) \quad k\sigma(h) \leq \text{constante arbitraire}$$

Nous voyons apparaître une condition de stabilité d'espèce voisine de celle que nous avons utilisée tout au long du chapitre III, et qui, en pratique, n'est pas restrictive.

Exemple. Dans le cas de l'équation des ondes, $V = H_0^1(0,1)$,

$$a(u,v) = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx},$$

la condition (1.17) s'écrit

$$(1.18) \quad \frac{k}{h} \leq \text{constante.}$$

4°) Convergence faible

Par des procédés techniques semblables à ceux que nous avons employés au chapitre II, on démontre sans difficulté

Théorème 1.3 (Raviart [2])

Dans les conditions d'application du théorème 1.2, si la condition de stabilité est satisfaite, les solutions approchées u_h convergent faiblement vers la solution u du problème (1.1) :

$$u_h \rightarrow u \text{ dans } L^\infty(0, T; X) \text{ *faible}$$

$$\frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)] \rightarrow u' \text{ dans } L^\infty(0, T; H) \text{ *faible}$$

5° Convergence forte

De l'égalité (1.2), on déduit immédiatement

Proposition 1.3

Soit $\Psi(t)$ une fonction réelle, régulière, s'annulant en T ; alors la solution $u(t)$ du problème (1.1) vérifie (*)

$$(1.19) \quad \left\{ \begin{aligned} & - \int_0^T \{ |u'(t)|^2 + a(t; u(t)) \} \Psi'(t) + a'(t; u(t)) \Psi(t) \} dt = \\ & = |u_1|^2 \Psi(0) + a(0; u_0) \Psi(0) + 2 \operatorname{Re} \int_0^T (f(t), u'(t)) \Psi(t) dt. \end{aligned} \right.$$

Remarque 1.4

Si l'on choisit pour $\Psi(t)$ une fonction décroissante à décroissance suffisamment rapide, l'expression à gauche dans (1.19) représente le carré d'une norme hilbertienne; nous allons démontrer la convergence forte pour cette norme. On pourra prendre par exemple

$$(1.20) \quad \Psi(t) = e^{-\lambda t} - e^{-\lambda T}$$

avec λ , positif, assez grand.

Nous allons mettre en évidence des résultats analogues à celui de la proposition 1-3, pour les solutions approchées (1.10) et (1.11). Pour cela multiplions l'égalité d'énergie (1.12) par Ψ_n et sommons; de simples transformations donnent

(*) Comme antérieurement, nous abrégeons $a(t; u, u)$ en $a(t; u)$.

$$(1.21) \left\{ \begin{aligned} & - \sum_{1 \leq n \leq N} \left\{ \left| \frac{u_n - u_{n-1}}{k} \right|^2 (\Psi_n - \Psi_{n-1}) + \frac{1}{2} a_{n-1}(u_n) (\Psi_n - \Psi_{n-1}) + \right. \\ & + \frac{1}{2} a_{n+1}(u_n) (\Psi_{n+1} - \Psi_n) \left. \right\} + \left| \frac{u_{N+1} - u_N}{k} \right|^2 \Psi_{N+1} + \frac{1}{2} a_N(u_{N+1}) \Psi_N + \\ & + \frac{1}{2} a_{N+1}(u_N) \Psi_{N+1} - \left| \frac{u_1 - u_0}{k} \right|^2 \Psi_0 - \frac{1}{2} a_0(u_1) \Psi_0 - \frac{1}{2} a_1(u_0) \Psi_1 + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq n \leq N} [a_{n-1}(u_n) - a_{n+1}(u_n)] \Psi_n = \operatorname{Re} \sum_{1 \leq n \leq N} (f_n, u_{n+1} - u_{n-1}) \Psi_n. \end{aligned} \right.$$

Prenons alors

$$(1.22) \quad (N - \frac{1}{2}) k < T \leq (N + \frac{1}{2}) k$$

$$(1.23) \quad \Psi_n = \Psi(nk);$$

Le choix des conditions initiales ($u_h^1 \rightarrow u_0$ dans X fort), la régularité de $\Psi(t)$, la convergence faible et la stabilité de u_h , et la régularité de $a(t; u, v)$ montrent que

$$(1.24) \left\{ \begin{aligned} & - \int_0^T \left\{ \left| \frac{u_h(t) - u_h(t-k)}{k} \right|^2 + a(t; u_h(t)) \right\} \Psi'(t) dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^T \left\{ a'(t; u_h(t - \frac{k}{2})) + a'(t; u_h(t + \frac{k}{2})) \right\} \Psi(t) dt \end{aligned} \right.$$

converge, lorsque h tend vers zéro, vers

$$(1.25) \quad 2 \operatorname{Re} \int_0^T (f(t), u'(t)) \Psi(t) dt + \{ |u_1|^2 + a(0, u_0) \} \Psi(0)$$

Considérons alors l'expression

$$(1.26) \left\{ \begin{aligned} & \varphi_h(T) = \int_0^T \left\{ \left| u'(t) - \frac{u_h(t) - u_h(t-k)}{k} \right|^2 + a(t; u(t) - u_h(t)) \right\} \Psi'(t) dt - \\ & - \frac{1}{2} \int_0^T \left\{ a'(t; u(t) - u_h(t - \frac{k}{2})) + a'(t; u(t) - u_h(t + \frac{k}{2})) \right\} \Psi(t) dt \end{aligned} \right.$$

Il résulte des relations (1.19) (1.24) et (1.25) et de la convergence faible que

$$(1.27) \quad \varphi_h(T) \rightarrow 0$$

D'autre part, on peut choisir $\Psi(t)$ positive décroissante, telle que

$$(1.28) \quad \varphi_h(T) \geq -\frac{1}{2} \int_0^T \left| u'(t) - \frac{u_h(t) - u_h(t-k)}{k} \right|^2 + a(t; u(t) - u_h(t)) \Psi'(t) dt$$

il suffit en effet de prendre dans (1.20) λ positif assez grand. On déduit alors de (1.27) et (1.28) la convergence forte du schéma (1.10).

Dans le cas du schéma (1.11), la multiplication de (1.13) par Ψ_n , montre que

$$(1.29) \quad \left[\begin{aligned} & - \sum_{1 \leq n \leq N} \left\{ \left| \frac{u_n - u_{n-1}}{k} \right|^2 + \operatorname{Re} a_n(u_n, u_{n-1}) \right\} (\Psi_n - \Psi_{n-1}) + \\ & + \left\{ \left| \frac{u_{N+1} - u_N}{k} \right|^2 + \operatorname{Re} a_{N+1}(u_{N+1}, u_N) \right\} \Psi_{N+1} - \\ & - \left\{ \left| \frac{u_1 - u_0}{k} \right|^2 + \operatorname{Re} a_1(u_1, u_0) \right\} \Psi_0 + \\ & + \sum_{1 \leq n \leq N} \left\{ \operatorname{Re} a_n(u_{n+1}, u_n) - \operatorname{Re} a_{n+1}(u_{n+1}, u_n) \right\} \Psi_n \end{aligned} \right]$$

est égal à

$$(1.30) \quad \operatorname{Re} \sum_{1 \leq n \leq N} (f_n, u_{n+1} - u_{n-1}) \Psi_n.$$

Comme dans le cas du schéma implicite, on montre que

.../...

$$(1.31) \left\{ \begin{aligned} & - \int_0^T \left\{ \left| \frac{u_h(t) - u_h(t-k)}{k} \right|^2 + \operatorname{Re} a(t; u_h(t), u_h(t-k)) \right\} \Psi'(t) dt \\ & - \int_0^T \operatorname{Re} a'(t; u_h(t+\frac{k}{2}), u_h(t-\frac{k}{2})) \Psi(t) dt \rightarrow \\ & \rightarrow \operatorname{Re} \int_0^T (f(t), u'(t)) \Psi(t) dt. \end{aligned} \right.$$

Considérons alors l'expression $\varphi_h(T)$ suivante

$$(1.32) \left\{ \begin{aligned} & - \int_0^T \left\{ \left| q_h u'(t) - \frac{u_h(t) - u_h(t-k)}{k} \right|^2 + \operatorname{Re} a(t; u(t) - u_k(t), u(t) - q_h u'(t) - u_h(t-k)) \right\} \psi'(t) dt \\ & - \int_0^T \operatorname{Re} a'(t; u(t+\frac{k}{2}) - u_k(t+\frac{k}{2}), u(t+\frac{k}{2}) - k q_h u'(t+\frac{k}{2}) - u_k(t-\frac{k}{2})) \psi(t) dt. \end{aligned} \right.$$

A l'aide du

Lemme 1

Sous la condition

$$(1.33) \quad k \sigma(h) \leq C \frac{st}{-},$$

$$q_h u' \rightarrow u' \quad \text{dans } L_2(0, T \rightarrow H) \text{ fort}$$

$$k q_h u' \rightarrow 0 \quad \text{dans } L_2(0, T \rightarrow X) \text{ fort,}$$

(démonstration cf. Chap. I § IV),

On montre sans grande difficulté que

$$(1.34) \quad \varphi_h(T) \rightarrow 0.$$

Enfin on vérifie que, sous la condition de stabilité

(1.16), pour un choix convenable de λ dans (1.20), on a

$$\varphi_h(\tau) \geq -\delta \int_0^T \left\{ \left| q_h u'(t) - \frac{u_h(t) - u_h(t-k)}{k} \right|^2 + \|u(t) - u_h(t)\|^2 \right\} \psi'(t) dt$$

($\delta > 0$), et on en déduit la convergence forte

Théorème 1.4

Dans les conditions d'application du théorème 1.3, si u_h^1 converge vers u_0 dans X fort,

$$\frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)] \rightarrow u'(t) \text{ dans } L_2(0, T \rightarrow H) \text{ fort.}$$

$$u_h(t) \rightarrow u(t) \text{ dans } L_2(0, T \rightarrow X) \text{ fort.}$$

Remarque 1.5

Pour le choix $u_h^1 = u_h^0 + k q_h u_1$, u_1 quelconque dans H , la condition sur u_h^1 ne sera réalisé que sous la condition de stabilité

$$(1.36) \quad k \sigma(h) \text{ borné.}$$

6°) Compléments

Nous allons maintenant améliorer les résultats du théorème 1.4; puisque u est dans $C(0, T \rightarrow V)$ et u' dans $C(0, T \rightarrow H)$, on peut espérer obtenir la convergence de u_h dans $L_\infty(0, T \rightarrow X)$ et de $\frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)]$ dans $L_\infty(0, T \rightarrow H)$

Faisons le produit scalaire de (1.10) et (1.11) par $q_h v$, $v \in V$, pour obtenir par sommation, respectivement

$$(1.37) \quad \begin{cases} \frac{1}{k} (u_{N+1} - u_N, q_h v) - \frac{1}{k} (u_1 - u_0, q_h v) + \\ \frac{k}{2} \sum_{n \leq N} a_n (u_{n+1} + u_n, q_h v) = k \sum_{n \leq N} (f_n, q_h v) \end{cases}$$

et

.../...

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{k} (u_{N+1} - u_N, q_h v) - \frac{1}{k} (u_1 - u_0, q_h v) + \\ & + k \sum_{n \leq N} a_n (u_n, q_h v) = k \sum_{n \leq N} (f_n, q_h v). \end{aligned} \right.$$

En utilisant dans ces deux égalités, la stabilité de $\frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)]$ dans $L_\infty(0, T \rightarrow H)$, la convergence forte de u_h dans $L_2(0, T \rightarrow X)$, la convergence forte de q_h et la régularité de $a(t; u, v)$, en prenant

$$(N - \frac{1}{2})k < t \leq (N + \frac{1}{2})k,$$

on montre immédiatement

Proposition 1.4

Dans les conditions d'application du théorème 1.4,

$(\frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)], v) \rightarrow (u'(t), v), \forall v \in V$
uniformément pour $t \in [0, T]$; u_h désigne ici soit la solution du schéma implicite (1.10), soit celle du schéma explicite (1.11).

D'autre part les égalités d'anergie (1.12) et (1.13) donnent par sommation

Proposition 1.5

Avec les hypothèses et notations de la proposition 1.4,

$$\left| \frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)] \right|^2 \rightarrow |u'(t)|^2$$

uniformément pour $t \in [0, T]$.

Il n'y a alors pas de difficulté à montrer

Théorème 1.5

Dans les conditions d'application du théorème 1.4; les solutions approchées données par les schémas (1.10) et (1.11) ont la propriété suivante :

$$(1.39) \quad \frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)] \rightarrow u'(t) \text{ dans } L_\infty(0, T; H) \text{ fort}$$

Corollaire 1.1

Sous les hypothèses et notations précédentes,

$$u_h \rightarrow u \text{ dans } L_\infty(0, T; H) \text{ fort.}$$

(la démonstration s'obtient en intégrant (1.39)).

Corollaire 1.2

$$u_h(t) \rightarrow u(t) \text{ dans } X \text{ faible, } \forall t.$$

(démonstration : c'est une conséquence immédiate du corollaire 1.1 et de la stabilité dans $L_\infty(0, T; X)$, théorème 1.2)

Revenons aux égalités d'énergie (1.12) et (1.13); par sommation, en utilisant les résultats de convergence forte (théorème 1.4, théorème 1.5), la stabilité dans $L_\infty(0, T; X)$ (théorème 1.2) et la régularité de $a(t; u, v)$ il est assez facile de montrer

Proposition 1.6

Avec les hypothèses et notations de théorème 1.5,

$$a(t; u_h(t), \dot{u}_h(t)) \rightarrow a(t; u(t), \dot{u}(t))$$

uniformément en t pour $t \leq T$.

En comparant ce résultat avec celui du corollaire 1.2, on obtient la convergence forte

$$u_h(t) \rightarrow u(t) \text{ dans } X, \forall t.$$

.../...

Théorème 1.6 (récapitulatif).

Les hypothèses sont celles du théorème 1.1 et celles du chap. I, § V, 2°; u désigne la solution du problème (1.1) et u_h la solution approchée définie au 1°, soit par le schéma implicite (1.10), soit par le schéma explicite (1.11).

Alors, sous les conditions suivantes

- (i) dans le cas implicite (1.10), $u_h^1 \rightarrow u_0$ dans X
- (h $\rightarrow$ 0) (ii) dans le cas explicite (1.11), $Mk^2\sigma(h)^2 \leq 4(1-\delta)$ (δ positif quelconque, M donnée à l'hypothèse 1.1), la solution approchée a les propriétés suivantes :
- (j) $\frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)] \rightarrow u'(t)$ dans $L_\infty(0, T \rightarrow H)$ fort
- (jj) $u_h(t) \rightarrow u(t)$ dans X fort, $\forall t$
- (jjj) u_h est bornée dans $L_\infty(0, T \rightarrow X)$

Remarque 1.6

Ces résultats s'étendent, sous des hypothèses convenables au cas de problèmes du type

$$u''(t) + B(t) u'(t) + A(t) u(t) = f(t)$$

$$u(0) = u_0$$

$$u'(0) = u_1.$$

II Schémas d'approximation du type "pas fractionnaires".

1° - Généralités -

Les idées et les résultats généraux concernant l'approximation de problèmes du premier ordre en t , que nous avons exposés au chap. III, § I-II, s'étendent

sans difficulté aux problèmes du deuxième ordre en t .
Reprenons le problème et les hypothèses du paragraphe I,
et nous allons transformer, en lui appliquant une
méthode "prédicteur-correcteur", le schéma implicite

$$(2.1) \quad \frac{1}{k^2} [u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}] + A_h^n u_h^{n+1} = f_h^n$$

$$(2.2) \quad u_h^0 = q_h u_0$$

$$(2.3) \quad u_h^1 = u_h^0 + kq_h u_1.$$

Hypothèse 2.1-

Les formes $a(t; u, v)$ de l'hypothèse 1.1 se décom-
posent en $a(t; u, v) = \sum_{1 \leq i \leq p} a_i(t; u, v)$

$a_i(t; u, v)$, hermitienne, non-négative, de classe
 C^1 en t .

$$|a_i(t; u, v)| \leq M ||u|| ||v||.$$

Approximation.

Comme au § I, 2°, on définit les opérateurs A_{ih}^n sur
 V_h par

$$(2.4) \quad (A_{ih}^n q_h u, q_h v) = a_i(nk; q_h u, q_h v), \quad \forall u, v \in V, \quad 1 \leq i \leq p,$$

qui vérifient des relations analogues à celles de la
proposition 1.1

Première forme des schémas

Transformons l'équation (2.1) en partant d'une prédiction
 u_{*h}^{n+1} de u_h^{n+1} et en effectuant les p corrections
suivantes

.../...

$$(2.5) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{k^2} [u_h^{n+j/p} - 2u_h^n + u_h^{n-1}] + \sum_{1 \leq i \leq j} A_{ih}^n u_h^{n+i/p} + \\ + \sum_{j < i \leq p} A_{ih}^n u_{*h}^{n+1} = f_h^n \\ \text{pour } j = 1, \dots, p. \end{array} \right.$$

Proposition 2.1

Sous l'hypothèse 2.1, étant donné un choix de u_{*h}^{n+1} , les équations (2.2), (2.3), (2.5) définissent une suite u_h^n et une solution approchée $u_h(t)$, par

$$(2.6) \quad u_h(t) = u_h^n \quad \text{pour } (n-1)\frac{k}{2} < t \leq (n+1)\frac{k}{2}.$$

Deuxième forme des schémas

Comme au chapitre III, § I, l'élimination des variables intermédiaires entre les équations (2.5), donne au schéma défini ci-dessus la forme "perturbée" de (2.1),

$$(2.7) \quad \frac{1}{k^2} [u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}] + A_h^n u_h^{n+1} + P_h^n [u_h^{n+1} - u_{*h}^{n+1}] = f_h^n$$

$$(2.8) \quad P_h^n = \frac{1}{k^2} \sum_{\substack{2 \leq r \leq p \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq p}} k^{2r} A_{j_1 h}^n \dots A_{j_r h}^n.$$

Remarque 2.1- Choix du prédicteur

Raisonnablement, le meilleur choix de u_{*h}^{n+1} serait $2u_h^n - u_h^{n-1}$ et, comme au chapitre III, le plus simple serait de prendre $u_{*h}^{n+1} = 0$.

Comme au chapitre III, théorème 1-1 et proposition 3.5, on montre :

.../...

Théorème 2.1

Les perturbations P_h^n , définies en (2.8'), vérifient les relations suivantes :

$$|(P_h^n q_h u, q_h v)| \leq P(k^2 \sigma(h)^2) \|q_h u\| \|q_h v\|$$

$$|(P_h^n q_h u, q_h v)| \leq P(k^2 \sigma(h)^2) \varepsilon(h, v) \|q_h u\|$$

$$|(\frac{1}{k} [P_h^{n+1} - P_h^n] q_h u, q_h v)| \leq P(k^2 \sigma(h)^2) \|q_h u\| \|q_h v\|$$

$$|(\frac{1}{k} [P_h^{n+1} - P_h^n] q_h u, q_h v)| \leq P(k^2 \sigma(h)^2) \varepsilon(h, v) \|q_h u\|$$

quels que soient $u, v \in V$, et où $P(\xi)$ est un polynôme en ξ , sans terme constant, et $\varepsilon(h, v)$ tend vers zéro avec h , v étant fixé dans V .

Hypothèse 2.2 (fondamentale)

Dans la suite de ce chapitre, nous supposons, sauf indication contraire, que k et h sont liés par la relation

$$k \sigma(h) \text{ borné, } \forall h$$

Remarque 2.2. Sur cette condition, cf. remarque 1.2 et aussi, chap.III, remarque 1.3.

Corollaire 2.1. Soit $u_h(t)$ et $P_h u_h(t)$ les fonctions définies par (2.6) à partir des suites (u_h^n) et $(P_h^n u_h^n)$ d'éléments de V_h . Si les u_h sont bornés dans $L_2(0, T; X)$ (et sous l'hypothèse 2.2').

$$\int_0^T (P_h u_h(t), q_h v) dt \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$$

quel que soit $v \in V$.

(démonstration évidente).

On pourrait, comme au chapitre III § II, envisager une classe de schémas à perturbations vérifiant les relations du théorème 2.1 et démontrer des théorèmes généraux d'existence, stabilité, convergence.

Contentons nous de donner le résultat suivant :

Théorème 2.2 (Consistance)

Sous l'hypothèse 2.2, si la solution approchée $u_h(t)$, définie par les équations (2.6'), (2.2), (2.3'), (2.7), et (2.8), est stable,

$$u_h \text{ borné dans } L_2(0, T \rightarrow X)$$

$$\frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)] \text{ borné dans } L_\infty(0, T \rightarrow H)$$

elle converge faiblement vers la solution $u(t)$ du problème (1.1) :

$$u_h \rightarrow u \text{ dans } L_2(0, T \rightarrow X) \text{ faible}$$

$$\frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)] \rightarrow u'(t) \text{ dans } L_\infty(0, T \rightarrow H) * \text{ faible.}$$

Démonstration - Faisons le produit scalaire de H de (2.7) et de v ($\in V$) et intégrons de 0 à t . Le corollaire 2.1 montre que les termes de perturbations convergent vers zéro; il est alors facile de voir que

$$(2.9.) \quad \begin{cases} \left(\frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)], v \right) + \int_0^t a(s; u_h(s), v) ds \rightarrow \\ \rightarrow (u_1, v) + \int_0^t (f(s), v) ds. \end{cases}$$

Soit maintenant $\{\tilde{h}\}$ une suite extraite de $\{h\}$ telle

que $u_{\tilde{h}} \rightarrow \tilde{u}$ dans $L_2(0, T \rightarrow X)$ faible;

la relation (2.9) montre que

.../...

$$(2.10) \quad \left(\frac{1}{k} \left[u_{\tilde{h}}(t) - u_{\tilde{h}}(t-k) \right], v \right) \rightarrow (y(t), v)$$

$$(2.11) \quad (y(t), v) = - \int_0^t a(s; \tilde{u}(s), v) \, ds + (u, v) + \\ + \int_0^t (f(s), v) \, ds$$

et $y \in L_{\infty}(0, T; H)$. On montre facilement que (au sens des distributions à valeurs vectorielles) $y(t) = \tilde{u}'(t)$; alors (2.11) et les hypothèses de l'approximation (chap. I, §V) montrent que $\tilde{u}$ est solution du problème (1.1). L'unicité de celle-ci permet de terminer la démonstration sans difficulté.

Remarque 2.3

Les théorèmes 2.1 et 2.2 montrent que sous l'hypothèse 2.2 les perturbations P_h^n sont "petites et régulières"; notons qu'elles ne sont pas, en général, symétriques.

2° - Méthode des directions alternées (I)

Douglas [6] propose des choix du prédicteur de la forme

$$(2.12) \quad u_{*h}^{n+1} = \omega u_h^n + (1-\omega) u_h^{n-1}$$

et appelle les schémas (2.7) correspondants "méthodes des directions alternées". On peut dans ce cas démontrer un résultat général de stabilité.

Proposition 2.2

Il existe δ , positif, tel que sous la condition

$$(2.13) \quad k \sigma(h) < \delta$$

la solution approchée $u_h(t)$ définie par les équations (2.2), (2.3), (2.7) et (2.8), pour le choix (2.12) du prédicteur u_{*h}^{n+1} vérifie les majorations

$$||u_h(t)|| + \left| \frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)] \right| \leq \text{constante},$$

quel que soit h et $t \leq T$.

Démonstration. On fait le produit scalaire de (2.7) et de $u_h^{n+1} - u_h^n$ et, avec des notations évidentes, on obtient

$$(2.14) \quad \left\{ \begin{aligned} & \left| \frac{u_{n+1} - u_n}{k} \right|^2 - \left| \frac{u_n - u_{n-1}}{k} \right|^2 + \left| \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{k} \right|^2 + \\ & + a_n(u_{n+1}) - a_n(u_n) + a_n(u_{n+1} - u_n) + \\ & + 2\operatorname{Re} (P_n [u_{n+1} - \omega u_n + (1-\omega)u_{n-1}], u_{n+1} - u_n) = \\ & = 2\operatorname{Re} (f_n, u_{n+1} - u_n). \end{aligned} \right.$$

Il suffit alors de majorer les termes de perturbations à l'aide du théorème 2.1 :

$$(2.15) \quad |(P_n[u_{n+1}-\omega u_n+(1-\omega)u_{n-1}], u_{n+1}-u_n)| \leq \\ \leq P(k^2 \sigma(h)^2) \cdot c^{st} \cdot \{ \|u_{n+1}-u_n\|^2 + \|u_n-u_{n-1}\|^2 \},$$

et de sommer (2.14) par rapport à n . Pour δ assez petit, (2.13) et (2.15) permettent de majorer les termes de perturbations par les termes $a_n (u_{n+1}-u_n)$. On termine alors comme pour les schémas du paragraphe I.

Remarque 2.4 - Ce résultat est faible; il affirme qu'il existe une condition de stabilité (2.13) de la forme de celle que l'on a trouvée au paragraphe I, mais qui n'est pas forcément meilleure.

Remarque 2.5 - Il ne semble pas qu'il existe un résultat équivalent pour le choix $u_{*h}^{n+1} = 0$.

Dans le cas commutatif, comme au (chap. III, § II, 2°), on peut montrer la stabilité inconditionnelle de ces schémas.

Proposition 2.3

Si les opérateurs A_{ih}^n sont commutatifs, la méthode des directions alternées (2.2), (2.3), (2.7) et (2.8), pour le choix (2.12) du prédicteur, donne une solution approchée stable, si $0 \leq \omega \leq 2$:

$$\|u_h(t)\| + \left| \frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)] \right| \leq \text{constante},$$

quel que soit h , $t \leq T$.

Démonstration - P_h^n est alors hermitien non négatif, faisons le produit scalaire de (2.7) et de $u_h^{n+1} - u_h^n$.

Pour $0 \leq \omega \leq 2$, le terme de perturbation vérifie

$$\left[\operatorname{Re} (P_n [u_{n+1} - \omega u_n + (1-\omega) u_{n-1}], u_{n+1} - u_n) \geq \left| \frac{1-\omega}{2} \right| \{ P_n (u_{n+1} - u_n) - P_n (u_n - u_{n-1}) \} \right].$$

En utilisant la régularité des P_h^n (théorème 2.1) on montre la stabilité sans difficulté.

Remarque 2.6— Sur l'intérêt pratique de la proposition 2.3, voir la remarque 2.5 du chapitre III.

Remarque 2.7— Pour la méthode des directions alternées telle que nous l'avons définie (équation (2.12)); il n'y a aucun résultat satisfaisant connu.

3° — Méthode des directions alternées (II)

On peut essayer d'obtenir des schémas intéressants en appliquant la méthode des directions alternées du chapitre précédent à la forme vectorielle du premier ordre que l'on peut associer à un schéma du second ordre.

Reprenons l'hypothèse 1.1 (avec $p = 2$) et définissons les opérateurs A_{1h}^n et A_{2h}^n . Pour simplifier, nous supposons ici que les formes $a_i(t; u, v)$ sont indépendantes de t , que $f(t) = 0$, et nous n'écrirons pas les indices h . Ainsi le schéma implicite (2.1) que nous voulons transformer s'écrit

$$(2.16) \quad \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{k^2} + (A_1 + A_2) u_{n+1} = 0$$

Système du premier ordre

Nous supposons que

$$(2.17) \quad A_i = C_i^* C_i \quad (i = 1, 2),$$

de sorte qu'en posant

$$(2.18) \quad w_n = \begin{pmatrix} \frac{u_n - u_{n-1}}{k} \\ c_1 u_n \\ c_2 u_n \end{pmatrix}$$

l'équation (2.16) est équivalente à

$$(2.19) \quad \frac{w_{n+1} - w_n}{k} + (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) w_{n+1} = 0$$

où

$$(2.20) \quad \mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & c_1^* & 0 \\ -c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_2^* \\ 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vérifient

$$(2.21) \quad \operatorname{Re} (\mathcal{A}_i u, u) = 0 \quad (i=1,2), \quad \forall u$$

Exemple 2.1 (RICHTHYER [4])

Dans le cas de l'équation des ondes à une dimension, le schéma implicite standard

$$(2.22) \quad \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{k^2} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2}$$

en posant

$$(2.23) \quad \begin{cases} v_i^n = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \\ w_i^n = \frac{u_i^n - u_{i-1}^{n-1}}{k} \end{cases}$$

.../...

se transforme en le système.

$$(2.24) \quad \begin{cases} \frac{w_i^{n+1} - w_1^n}{k} = \frac{v_{i+1}^{n+1} - v_1^{n+1}}{h} \\ \frac{v_i^{n+1} - v_1^n}{k} = \frac{w_i^{n+1} - w_{i-1}^{n+1}}{h} \end{cases}$$

Directions alternées

(2.21) permet d'appliquer la méthode des directions alternées (chap. III § IV) à l'équation (2.19), les équations

$$(2.25) \quad \begin{cases} \frac{w_{n+1/2} - w_n}{k} + \mathcal{A}_1 w_{n+1/2} + \mathcal{A}_2 w_{n+1} = 0 \\ \frac{w_{n+1} - w_n}{k} + \mathcal{A}_1 w_{n+1/2} + \mathcal{A}_2 w_{n+1} = 0. \end{cases}$$

ont une solution unique qui vérifie

$$(2.26) \quad \frac{w_{n+1} - w_n}{k} + (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) w_{n+1} + k \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2 (w_{n+1} - w_n) = 0.$$

L'équation (2.26), en détaillant les trois composantes,

$w_n^{(1)}$, $w_n^{(2)}$ et $w_n^{(3)}$, s'écrit aussi

$$(2.27) \quad \begin{cases} \frac{w_{n+1}^{(1)} - w_n^{(1)}}{h} + C_1^* w_{n+1}^{(2)} + C_2^* w_{n+1}^{(3)} = 0 \\ \frac{w_{n+1}^{(2)} - w_n^{(2)}}{k} - C_1 w_{n+1}^{(1)} - k C_1 C_2^* (w_{n+1}^{(3)} - w_n^{(3)}) = 0 \\ \frac{w_{n+1}^{(3)} - w_n^{(3)}}{k} - C_2 w_{n+1}^{(1)} = 0. \end{cases}$$

Il est facile de montrer par récurrence

Proposition 2.4

Si w_n peut être écrit sous la forme

$$(2.28) \quad w_n = \begin{pmatrix} \frac{u_n - u_{n-1}}{k} \\ c_1 (I + k^2 A_2) u_n \\ c_2 u_n \end{pmatrix}$$

alors w_{n+1} , donné par (2.26), est aussi de cette forme et la suite (u_n) ainsi définie vérifie l'équation

$$(2.29) \quad \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{k^2} + (A_1 + A_2) u_{n+1} + k^2 A_1 A_2 u_{n+1} = 0$$

Ainsi, en définissant convenablement w_0 , la méthode des directions alternées appliquée à la forme (2.19), conduit à un schéma du type "pas fractionnaires" (au sens $u_{*h}^{n+1} = 0$).

On peut démontrer le résultat suivant

Théorème 2.3

Sous l'hypothèse 2.1 (avec $p = 2$), le schéma d'approximation.

$$(2.30) \quad \frac{1}{k^2} [u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}] + (A_{1h}^n + A_{2h}^n) u_h^{n+1} + k^2 A_{1h}^n A_{2h}^n u_h^{n+1} = f_h^n$$

$(u_h^0$ et u_h^1 définis par (22) et (23)), définit par (2.6) une solution approchée $u_h(t)$ qui, sous l'hypothèse 2.2, converge vers la solution $u(t)$ du problème (1.1) :

$$u_h \rightarrow u \text{ dans } L_2(0, T \rightarrow X) \text{ fort}$$

.../...

$$\frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)] \rightarrow u'(t) \text{ dans } L_\infty(0, T+H) \text{ fort.}$$

Remarque 2.8-

Le schéma (2.30) est proposé par KONOVALOV [12] dans le cas général (p quelconque), mais il est probablement instable, en général, pour $p > 2$. C'est aussi (à quelques détails près) le schéma proposé par SAMARSKII [13].

4° — Méthode des pas fractionnaires "symétriques".

On ne sait pas en général montrer la stabilité du schéma (2.7), (2.8) avec $u_{*h}^{n+1} = 0$ et l'une des difficultés que l'on rencontre est que les perturbations P_h^n ne sont pas symétriques. Cette irrégularité peut-être surmontée facilement (au prix de calculs supplémentaires) par l'artifice que nous avons déjà employé au chap. III, § III, 4° : quitte à augmenter le nombre p de l'hypothèse 2.1, on peut toujours supposer

Hypothèse 2.3

En plus de l'hypothèse 2.1, on suppose que

$$a_i(t; u, v) = a_{p+1-i}(t; u, v) \quad (1 \leq i \leq p).$$

Alors on montre (cf. chap. III, corollaire 3.3)

Proposition 2.5

Sous l'hypothèse 2.3, les opérateurs de perturbations P_h^n définis par (2.8) sont hermitiens,

$$(P_h^n u_h, v_h) = (u_h, P_h^n v_h), \quad \forall u_h, v_h \in V_h$$

et il existe une fonction continue positive $\delta(\xi)$ telle

.../...

que

$$([A_h^n + P_h^n] u_h, u_h) \geq \delta (k^2 \sigma(h)^2) \|u_h\|^2,$$

quelque soit $u_h \in V_h$, quel que soit h .

A l'aide de cette proposition, on peut montrer que le schéma (2.7) (avec $u_{*h}^{n+1} = 0$) est stable, sous l'hypothèse 2.2.

Plutôt que d'étudier (2.7), pour des raisons de précision de l'approximation, il est préférable d'envisager le schéma suivant

$$(2.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_h^0 = q_h u_0 \\ u_h^1 = u_h^0 + k q_h u_1 \\ \frac{1}{k^2} [u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}] + \frac{1}{2} [A_h^n + P_h^n] (u_h^{n+1} + u_h^{n-1}) = f_h^n \\ P_h^n = \frac{1}{k^2} \sum_{\substack{2 \leq r \leq p \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r \leq p}} k^{2r} A_{j_1 h}^n A_{j_2 h}^n \dots A_{j_r h}^n \end{array} \right.$$

dont l'ordre d'approximation en t (évalué classiquement lorsque les données et la solution sont suffisamment régulières) est $O(k^2)$.

Il est clair que le schéma (2.31) peut se définir par des équations du type (2.5) et que les résultats des théorèmes 2.1 et 2.2 et de la proposition 2.5 sont valables;

Proposition 2.6

Le schéma d'approximation (2.31), définit par (2.6)

.../...

une solution approchée $u_h(t)$, qui, sous l'hypothèse 2.2, est stable :

$$\left| \frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)] \right| + \|u_h(t)\| \leq \text{constante},$$

$$\forall h, \forall t \in [0, T]$$

Démonstration - Il suffit de faire le produit scalaire de (2.31) et de $u_h^{n+1} - u_h^{n-1}$; à l'aide du théorème 2.1 et de la proposition 2.5, on transforme l'égalité d'énergie ainsi obtenue, exactement comme dans le schéma implicite standard (1.10), pour obtenir, sous l'hypothèse 2.2, une majoration a priori semblable à celles du théorème 1.2.

Corollaire 2.2

La solution approchée u_h converge faiblement vers la solution u du problème (1.1) :

$$u_h \rightarrow u \text{ dans } L_\infty(0, T \rightarrow X) \text{ *faible.}$$

$$\frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)] \rightarrow u'(t) \text{ dans } L_\infty(0, T \rightarrow H) \text{ *faible.}$$

(démonstration : cf. théorème 2.2).

Théorème 2.4

Sous l'hypothèse 2.3, la méthode des pas fractionnaires "symétriques", définie par les équations (2.31), donne une solution approchée u_h de la solution u du problème (1.1) qui, sous la condition

$$k \sigma(h) \text{ borné}$$

.../...

converge fortement :

$$u_h(t) \rightarrow u(t) \text{ dans } X \text{ fort, } \forall t$$

$$\frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)] \rightarrow u'(t) \text{ dans } L_\infty(0, T \rightarrow H) \text{ fort et}$$

$$u_h \text{ est bornée dans } L_\infty(0, T \rightarrow X).$$

Démonstration - Soit v_n la solution du schéma implicite

$$(1.10) \text{ et posons } w_n = u_n - v_n; w_n \text{ est solution de (2.31)}$$

où l'on doit remplacer u_0 et u_1 par zéro et f_h^n par

$$-\frac{1}{2} P_h^n [v_h^{n+1} + v_h^{n-1}]. \text{ Si l'on reprend dans ce cas la}$$

démonstration de la stabilité (proposition 2.6), on est

ramené, pour démontrer le théorème 2.4, à montrer que

$$(2.32) \quad k \sum_{nk \leq T} (P_h^n [v_h^{n+1} + v_h^{n-1}], w_h^{n+1} - w_h^{n-1}) \rightarrow 0.$$

Or cette somme se présente sous la forme

$$\int_0^T (P_h v_h(t), w_h(t)) dt$$

où l'on sait que

$$v_h(t) \rightarrow v(t) \text{ dans } X \text{ fort et}$$

$$||v_h(t)|| + ||w_h(t)|| \leq \text{constante.}$$

Alors du théorème 2.1, résulte facilement (2.32), et

l'on obtient que

$$u_h - v_h \rightarrow 0 \text{ dans } L_\infty(0, T \rightarrow X) \text{ fort et}$$

$$\frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(t-k)] - \frac{1}{k} [v_h(t) - v_h(t-k)] \rightarrow 0 \text{ dans } L_\infty(0, T \rightarrow H)$$

fort; le théorème 2.4 résulte alors du théorème 1.6.

5° - Traitement du problème général

Dans ce paragraphe, nous voulons seulement indiquer, sans les justifier complètement, comment les méthodes du chapitre III et du (4°) permettent de traiter des problèmes de la forme

$$(2.33) \quad \begin{cases} u''(t) + B(t) u'(t) + A(t) u(t) = f(t) \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1, \end{cases}$$

où $A(t)$ est l'opérateur défini par les formes $a(t;u,v)$ de l'hypothèse 1.1 et où $B(t)$ est défini par

$$(B(t)u,v) = b(t;u,v),$$

$b(t;u,v)$ étant une forme sesquilinéaire sur $X \times X$ vérifiant les relations

$$|b(t;u,v)| \leq M|u| ||v||$$

$$\operatorname{Re} b(t;u,u) \geq 0.$$

En précisant certaines hypothèses, on peut donner un sens au problème (2.33) et montrer qu'il a une solution unique (cf. LIONS [3], LIONS - STRAUSS [14])

Le schéma d'approximation

$$(2.34) \quad \frac{1}{k^2} [u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}] + B_h^n \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} + A_h^n u_h^{n+1} = f_h^n$$

est étudié dans RAVIART [2], et nous allons montrer comment lui appliquer nos méthodes de "prédiction-correction".

Nous supposons que les formes $a(t;u,v)$ vérifient l'hypothèse 2.3 et

$$(2.40) \quad \frac{1}{k^2} \{ [u_{n+1} - u_n] - [u_{n+q/r} - u_n] \} + [A_n + P^n] u_{n+1} = 0$$

où P_h^n est donné par (2.8)

Stabilité

En procédant sur l'équation (2.38), comme au chap. III, § III

il est facile de montrer qu'il existe une constante M telle que

$$(2.41) \quad \left\{ \left| \frac{1}{k} [u_{n+q/r} - u_n] \right|^2 - \left| \frac{1}{k} [u_n - u_{n-1}] \right|^2 \leq Mk \{ |f_n|^2 + \right. \\ \left. + \left| \frac{1}{k} [u_n - u_{n-1}] \right|^2 \right\}$$

et en traitant (2.40) comme au (4°), on obtient

$$\left\{ \left| \frac{1}{k} [u_{n+1} - u_n] \right|^2 - \left| \frac{1}{k} [u_{n+q/r} - u_n] \right|^2 + ([A_n + P_n] u_{n+1}, u_{n+1}) - \right. \\ \left. - ([A_n + P_n] u_n, u_n) \leq 0 \right.$$

En ajoutant (2.41) et (2.42), il n'y a pas de difficulté à montrer la stabilité de la solution approchée u_h dans $L_\infty(0, T \rightarrow X)$ et de $\frac{1}{k} [u_h(t) - u_h(-k)]$ dans $L_\infty(0, T \rightarrow H)$. On peut ensuite (si le problème (2.33') a une solution unique) montrer des résultats de convergence forte.

Remarque 2.9— On pourrait aussi, comme au (3°),

obtenir de nouveaux schémas d'approximation en appliquant les méthodes du chapitre III, § III, à la forme vectorielle du premier ordre. Ces schémas, à la différence de ceux de ce chapitre, ne permettent pas d'exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et u_{n-1} : les "variables intermédiaires" $u_{n+j/p}$ doivent être conservées d'un pas à l'autre ; cf. TEMAM [8].

.../...

Remarque 2.10. On pourrait aussi appliquer les méthodes du chapitre III, § V; dans le cas du problème (1.1), on obtiendrait un schéma de la forme

$$\frac{1}{k^2} [u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}] + Au_{n+1} + k^2 T^* T [u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}] = f_n$$

avec

$$A = T^* + T.$$

Chapitre V - Directions Alternées et Opérateurs monotones.

La méthode des directions alternées s'adapte très bien aux cas de problèmes non linéaires monotones, tant stationnaires que d'évolution. Nous commencerons par indiquer comment la technique utilisée au chapitre III peut servir à démontrer la convergence de la méthode des directions alternées, appliquée à des problèmes elliptiques linéaires (en dimension finie), puis nous étendrons à des problèmes elliptiques monotones (en dimension finie) et enfin à des problèmes paraboliques monotones. La méthode des pas fractionnaires a aussi été étendue aux problèmes paraboliques monotones par TEMAM [8].

I CAS LINEAIRE

Théorème 1.1 (Pearcy [15])

Soit H, V, D , des matrices symétriques définies positives et soit α, β ($\alpha \leq \beta$) deux nombres positifs. Alors il existe un entier N tel que pour toute suite (a_n)

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_N \geq \alpha > 0 \\ a_k = a_k \pmod{N} \quad (k > N), \end{array} \right.$$

la suite (u_n) définie par

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{n+1} D(u_{n+1/2} - u_n) + H u_{n+1/2} + V u_n = b \\ a_{n+1} D(u_{n+1} - u_n) + H u_{n+1/2} + V u_{n+1} = b \end{array} \right.$$

$(u_0$ quelconque), converge vers la solution u de

$$(1.3) \quad (H + V) u = b$$

Démonstration -

Il suffit de montrer que la suite (v_n) définie, pour v_0 quelconque, par

$$(1.4) \quad a_{n+1} (v_{n+1} - v_n) + \hat{V} v_{n+1} + \hat{H} \left[v_{n+1} + \frac{1}{a_{n+1}} \hat{V} (v_{n+1} - v_n) \right] = 0$$

$$(1.5) \quad \hat{V} = D^{-1/2} V D^{-1/2}, \quad \hat{H} = D^{-1/2} H D^{-1/2}$$

converge vers zéro.

En faisant le produit scalaire (euclidien) par l'argument $\hat{v}_{n+1}$ de $\hat{H}$ et en prenant la partie réelle, on montre que la solution de (1.4) vérifie l'égalité d'énergie

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{aligned} & a_{n+1}^2 (|v_{n+1}|^2 - |v_n|^2 + |v_{n+1} - v_n|^2) + |\hat{V} v_{n+1}|^2 - \\ & - |\hat{V} v_n|^2 + |\hat{V} (v_{n+1} - v_n)|^2 + 2a_{n+1} \operatorname{Re} \{ (\hat{V} [v_{n+1} - v_n], v_{n+1} - v_n) + \\ & + (\hat{V} v_{n+1}, v_{n+1}) + (\hat{H} v_{n+1}, \hat{v}_{n+1}) \} = 0 \end{aligned} \right.$$

où

$$(1.7) \quad \hat{v}_{n+1} = v_{n+1} + \frac{1}{a_{n+1}} \hat{V} (v_{n+1} - v_n).$$

On voit alors que si

$$\operatorname{Re} (\hat{V} u, u) \geq 0 \quad \forall u$$

$$\operatorname{Re} (\hat{H} u, u) \geq 0 \quad \forall u$$

$$\beta \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_N \geq \alpha > 0,$$

on a la majoration

$$(1.8) \quad |v_N|^2 + \sum_{n \leq N} |v_n - v_{n-1}|^2 \leq \frac{\beta^2 + \|\hat{V}\|^2}{\alpha^2} |v_0|^2.$$

Ainsi il existe un n ($\leq N$), tel que

$$(1.9) \quad |v_n - v_{n-1}|^2 \leq \frac{1}{N} \frac{\beta^2 + \|\hat{V}\|^2}{\alpha^2} |v_0|^2$$

.../...

$$(1.10) \text{ et } |v_N|^2 \leq \frac{\beta^2 + \|\hat{V}\|^2}{\alpha} |v_n|^2 \quad (v_n \leq N).$$

Or l'équation (1.4) montre que

$$(1.11) \quad |v_n| \leq \|(\hat{V} + \hat{H})^{-1}\| (\beta + \|\frac{\hat{H}\hat{V}}{\alpha}\|) |v_n - v_{n-1}|.$$

Des relations (1.9) (1.10) et (1.11), on déduit que, en posant

$$(1.12) \quad M(\alpha, \beta, V, H, D) = \|(\hat{V} + \hat{H})^{-1}\| (\beta + \|\frac{\hat{H}\hat{V}}{\alpha}\|)^2 + \frac{\|\hat{V}\|^2}{\alpha^2},$$

$$(1.13) \quad |v_N|^2 \leq \frac{1}{N} M(\alpha, \beta, V, H, D)^2 |v_0|^2.$$

Ainsi le théorème énoncé se démontre en prenant

$$(1.14) \quad N > M(\alpha, \beta, V, H, D)^2.$$

Remarque 1.1

Notre démonstration s'applique sous les hypothèses suivantes : V et H sont deux opérateurs linéaires continus sur un espace de Hilbert E, vérifiant

$$(1.15) \quad \operatorname{Re} (Vx, x) \geq 0, \quad \operatorname{Re} (Hx, x) \geq 0, \quad \operatorname{Re} ((V+H)x, x) \geq |x|^2$$

et D est un opérateur linéaire continu hermitien et défini positif sur E :

$$(1.16) \quad (Dx, y) = (x, Dy) \quad \text{et} \quad (Dx, x) \geq |x|^2.$$

II Cas monotone

Rappelons le résultat suivant

Théorème 2.1

Soit A un opérateur (non linéaire) continu sur R^m , satisfaisant la condition de coercivité.

$$(2.1) \quad \frac{(Au, u)}{|u|} \rightarrow \infty \text{ avec } |u|;$$

alors, f étant donné dans R^m , le problème

$$(2.2) \quad Au = f$$

a une solution (non unique en général).

Remarque 2.1

Nous supposons dans la suite que les opérateurs sont monotones :

$$(2.3) \quad (Au - Av, u - v) \geq 0 ;$$

alors la solution de (2.2) est unique si dans (2.3)

l'égalité entraîne que $u = v$.

Méthode des directions alternées

Proposition 2.1

Soit H et V des opérateurs continus monotones sur R^m ;
soit D un opérateur linéaire continu symétrique et défini positif sur R^m ; soit $\{a_n\}$ une suite de paramètres positifs.
Alors, f étant donné dans R^m , les équations

$$(2.4) \quad \begin{cases} a_{n+1} D(u_{n+1}/2 - u_n) + H u_{n+1}/2 + V u_n = f \\ a_{n+1} D(u_{n+1} - u_n) + H u_{n+1}/2 + V u_{n+1} = f \end{cases}$$

définissent, à partir de u_0 quelconque, une unique suite $\{u_n\}$ qui vérifie l'équation

$$(2.5) \quad a_{n+1} D(u_{n+1} - u_n) + V u_{n+1} + H \left[u_{n+1} + (a_{n+1} D)^{-1} (V u_{n+1} - V u_n) \right] = f.$$

Démonstration

Les opérateurs $a_{n+1} D + H$ et $a_{n+1} D + V$ sont évidemment monotones et ils sont coercifs puisque

$$(2.6) \quad \frac{(a_{n+1} D + H)u, u)}{|u|} \geq \frac{(a_{n+1} D)u, u)}{|u|} + \frac{(H u, u)}{|u|} \geq \dots / \dots$$

$$(\dots) \geq \alpha_n |u| - |H_0| \quad (\alpha_n > 0);$$

de plus évidemment ,

$$(2.7) \quad ([a_{n+1} D+H] (u-v), u-v) = 0 \Rightarrow u=v$$

Ainsi les équations (2.4) ont une solution unique et l'élimination de la variable intermédiaire

$u_{n+1/2}$ donne (2.5).

Relation d'énergie

Soit u solution de

$$(2.8) \quad (H+V) u = f.$$

Faisons le produit scalaire de

$$(2.9) \quad \hat{u}_{n+1}-u = u_{n+1} + (a_{n+1}D)^{-1} (Vu_{n+1}-Vu_n) - u$$

avec (2.5) et (2.8), pour obtenir par soustraction et multiplication par $2 a_{n+1}$

$$(2.10) \quad \left\{ \begin{aligned} & a_{n+1}^2 \{ (D[u_{n+1}-u], u_{n+1}-u) - (D[u_n-u], u_n-u) + \\ & (D[\hat{u}_{n+1}-u_n], u_{n+1}-u_n) \} + \{ (D^{-1}[Vu_{n+1}-Vu], Vu_{n+1}-Vu) - \\ & (D^{-1}[Vu_n-Vu], Vu_n-Vu) + (D^{-1}[Vu_{n+1}-Vu_n], Vu_{n+1}-Vu_n) \} + \\ & + 2 a_{n+1} \{ (Vu_{n+1}-Vu_n, u_{n+1}-u_n) + (Vu_{n+1}-Vu, u_{n+1}-u) + \\ & (H\hat{u}_{n+1}-Hu, \hat{u}_{n+1}-u) \} = 0. \end{aligned} \right.$$

Définition 2.1

Etant donné H et V , opérateurs continus monotones, D opérateur linéaire continu hermitien non négatif sur R^m , et $\{a_n\}$ une suite de paramètres positifs, on appelle méthode des directions alternées le procédé itératif défini à la proposition 2.1.

Théorème 2.2

H et V étant deux opérateurs continus monotones sur R^m , on suppose que l'équation (2.8) a une solution unique u; si la suite $\{a_n\}$ de paramètres vérifié

$$a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n \geq \dots \geq \alpha > 0,$$

la méthode des directions alternées est convergente (quel que soit D) : la suite u_n définie par (2.4) converge vers u, quel que soit u_0 .

Démonstration - Par sommation des équations (2.10), on voit qu'il existe un nombre M indépendant de N tel que

$$(2.11) \quad |u_N - u|^2 + \sum_{n \leq N} |u_n - u_{n-1}|^2 \leq M \{ |u_0 - u|^2 + |Vu_0 - Vu|^2 \}.$$

(2.11) montre que les u_n sont bornés et que $u_n - u_{n-1}$ tend vers zéro; on en déduit, en utilisant dans (2.5) la continuité de H et V, que $(H+V) u_n$ converge vers f et la démonstration se termine sans difficulté.

Remarque 2.2 - Il est intéressant de constater que l'on n'a pas eu besoin de la coercivité de H ou V ou $H + V$, ni même de supposer que l'équation (2.8) a une solution quel que soit f.

Remarque 2.3 - En particulier la méthode des directions alternées à un paramètre ($a_n = a > 0$) est convergente. On peut étendre le théorème 1.1, au cas des opérateurs monotones : considérons une suite de paramètres. .../...

$$(2.12) \quad \beta \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_N \geq \alpha > 0 ;$$

par sommation, l'équation (2.10) donne sans difficulté les relations

$$(2.13) \quad \sum_{n \leq N} |u_n - u_{n-1}|^2 \leq C^2 \{ |u_0 - u|^2 + |Vu_0 - Vu|^2 \}$$

$$(2.14) \quad |u_p - u|^2 \leq C^2 \{ |u_n - u|^2 + |Vu_n - Vu|^2 \} \quad (0 \leq n \leq p \leq N)$$

où C ne dépend que de α, β, D . La continuité de V montre qu'il existe une fonction $v(x, y)$, tendant vers zéro avec y, uniformément pour x borné, telle que

$$(2.15) \quad |u_n - u| + |Vu_n - Vu| \leq v(|u|, |u_n - u|).$$

La relation (2.13) montre qu'il existe un n ($\leq N$) tel que

$$(2.16) \quad |u_n - u_{n-1}| \leq \frac{1}{\sqrt{N}} C v(|u|, |u_0 - u|)$$

et la relation (2.14) montre que

$$(2.17) \quad |u_N - u| \leq C v(|u|, |u_n - u|).$$

Il reste à relier (2.16) et (2.17) à l'aide de la relation (2.5); la continuité de H et V montre qu'il existe une fonction $h(x, y)$, tendant vers zéro avec y, uniformément pour x borné, telle que

$$(2.18) \quad \left[|a_n D (u_n - u_{n-1}) + H [u_n + (a_n D)^{-1} (Vu_n - Vu_{n-1})] - Hu_n| \leq \right. \\ \left. \leq h(|u_n|; |u_n - u_{n-1}|) \right]$$

c'est-à-dire

$$(2.19) \quad |(H+V)u_n - (H+V)u| \leq h(|u_n|; |u_n - u_{n-1}|).$$

Supposons que l'opérateur $(H+V)$ vérifie la condition de coercivité (2.1) et soit injectif, de sorte que son inverse $(H+V)^{-1}$ est défini et continu. Alors, en changeant au besoin la fonction $h(x, y)$, (2.19) montre que

$$(2.20) \quad |u_n - u| \leq h (|u_n|; |u_n - u_{n-1}|).$$

Comme

$$(2.21) \quad |u_n - u| \leq c v (|u|, |u_0 - u|),$$

Il est clair qu'il existe une fonction $\phi(x, y; z)$, tendant vers zéro avec z uniformément pour x et y bornés, telle que l'on puisse écrire, d'après (2.17'), (2.20), (2.21),

$$(2.22) \quad |u_N - u| \leq \phi (|u|, |u_0 - u|; |u_n - u_{n-1}|).$$

Alors en prenant N suffisamment grand (dépendant de $|u|$ et de $|u_0 - u|$) on aura, d'après (2.16) et (2.22)

$$(2.23) \quad |u_N - u| \leq \rho |u_0 - u| \quad (\rho < 1)$$

Théorème 2.3

Soit H et V deux opérateurs non linéaires, monotones, continus sur R^m et on suppose que $H+V$ est injectif et vérifie la condition de coercivité (2.1); soit D un opérateur hermitien continu défini positif sur R^m ; soit f et u_0 donnés dans R^m et α et β ($\alpha \leq \beta$) deux nombres positifs.

Alors il existe un entier N (dépendant de toutes les données, (en particulier de f et de u_0) tel que, pour toute suite de paramètres vérifiant

$$\begin{cases} \beta \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_N \geq \alpha \\ a_k = a_{k \pmod N} \quad (k > N), \end{cases}$$

la méthode des directions alternées (2.4) donne une suite $\{u_n\}$ qui converge vers la solution de

$$(2.25) \quad (H + V) u = f.$$

.../...

Remarque 2.4 - La suite $\{u_{n+1/2}\}$ converge aussi vers u .

Remarque 2.5 - Le théorème 2.3 a un faible intérêt pratique : d'une part on ne connaît pas N , d'autre part la résolution des opérations (2.4), en général non linéaires, présente des difficultés.

Remarque 2.6-

La méthode des directions alternées, telle que nous l'avons définie dans ce paragraphe, s'applique aux problèmes en dimension finie, obtenus par exemple en discrétisant un problème (aux dérivées partielles) stationnaire .

III Problèmes paraboliques monotones

1° - Notations

Soit H un espace de Hilbert (complexe) séparable, de produit scalaire (x,y) et de norme $|x|$; soit V_1 et V_2 deux espaces de Banach réflexifs, contenus dans H , les injections étant continues et on suppose que $V_1 \cap V_2$ est dense dans V_1 , V_2 et H .

Ainsi, V_1 étant l'antidual de V_1' , de norme notée

$\|x\|_{*1}$, on a les inclusions

$$V_1 \subset H \subset V_1'$$

et on notera, par extension, (v, v') l'antidualité de V_1 et V_1' . Etant donné deux nombres p_i ($i=1,2$) et leurs conjugués, $2 \leq p_i < \infty$, $\frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i'} = 1$,

soit A_1 une application (non linéaire) de V_1 dans V_1'

.../...

ayant les propriétés suivantes.

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(I) l'image d'une borné est bornée et, plus} \\ \text{précisément, } ||A_1 v||_{*1}^{p_1'} \leq M ||v||_1^{p_1}, \forall v \in V_1; \\ \text{(II) } A_1 \text{ continu sur les droites de } V_1 \text{ dans } V_1' \\ \text{faible} \\ \text{(III) } A_1 \text{ est monotone : } \operatorname{Re} (A_1 u - A_1 v, u - v) \geq 0 \\ \text{(IV) } A_1 \text{ est coercif et, plus précisément,} \\ \operatorname{Re} (A_1 v, v) \geq \alpha ||v||_1^{p_1}, \forall v \in V_1 \quad (\alpha > 0) \end{array} \right.$$

Rappelons les résultats suivants (LIONS [16])

Lemme 3.1

Soit F l'espace $L_{p_1}(0, T; V_1) \cap L_{p_2}(0, T; V_2) \cap L_2(0, T; H)$ muni de la norme correspondante

$$||f|| = ||f||_1 + ||f||_2 + |f|;$$

alors si u appartient à F et si $\frac{du}{dt}$ appartient à F' , u est une fonction de $C(0, T; H)$.

Théorème 3.1

Soit f donné dans F' et u_0 dans H ; alors, sous les hypothèses (3.1), le problème

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \in F, \quad \frac{du}{dt} \in F', \quad u(0) = u_0 \text{ et} \\ \frac{du}{dt} + (A_1 + A_2) u = f \end{array} \right.$$

a une solution unique, qui appartient à $C(0, T; H)$ et vérifie les relations

$$(3.3) \quad \begin{aligned} & (u(T), v)\varphi(T) - (u_0, v)\varphi(0) - \int_0^T \{ (u(t), v)\varphi'(t) - \\ & - (A_1 u(t) + A_2 u(t), v)\varphi(t) + (f(t), v)\varphi(t) \} dt = 0 \end{aligned}$$

quels que soient φ dans $\mathcal{D}[0, T]$ et v dans $V_1 \cap V_2 \cap H$;

$$(3.4) \quad \left| \begin{aligned} & |u(T)|^2 - |u_0|^2 + 2 \operatorname{Re} \int_0^T (A_1 u(t) + A_2 u(t), u(t)) dt = \\ & 2 \operatorname{Re} \int_0^T (f(t), u(t)) dt. \end{aligned} \right|$$

2° - Approximation

Donnons nous une famille d'applications q_h , "h tendant vers zéro", ayant les propriétés suivantes :

$$(3.5) \quad \left| \begin{aligned} & q_h : V_1 \cap V_2 \rightarrow V_1 \cap V_2, \text{ linéaire ;} \\ & \text{l'image } V_h = q_h(V_1 \cap V_2) \text{ est de dimension} \\ & \text{finie;} \\ & q_h v \rightarrow v \text{ dans } V_1, V_2 \text{ et } H \text{ (forts);} \\ & \|q_h v\|_1 \leq M \|v\|_1, \quad |q_h v| \leq M |v|, \\ & \forall v \in V_1 \cap V_2, \forall h, i = 1, 2. \end{aligned} \right|$$

Introduisons aussi $\sigma_i(h)$, ($i=1,2$) tel que

$$(3.6) \quad \|q_h v\|_1 \leq \sigma_i(h) |q_h v|, \quad \forall v \in V_1 \cap V_2$$

Proposition 3.1

L'élément u_h^0 de V_h défini par

$$(3.7) \quad (u_h^0, v_h) = (u_0, v_h), \quad \forall v_h \in V_h$$

converge vers u_0 dans H fort.

Proposition 3.2

Les équations

$$(3.8) \quad (A_i u_h, v_h) = (A_{ih} u_h, v_h) \quad \forall u_h, v_h \in V_h$$

définissent sur V_h deux opérateurs A_{ih} ($i=1,2$), non linéaires, continus, coercifs et monotones et

$$(3.9) \quad |A_{ih} u_h| \leq M \sigma_i(h) |u_h|^{p_i-1}$$

.../...

Proposition 3.3

Etant donné un découpage du temps en intervalles de longueur k , définissons f_h^n , élément de V_h , par

$$(3.10) \quad (f_h^n, v_h) = \frac{1}{k} \int_{(n-1)k}^{nk} (f(t), v_h) dt, \forall v_h \in V_h;$$

alors le schéma des directions alternées

$$(3.11) \quad \begin{cases} \frac{u_h^{n+1/2} - u_h^n}{h} + A_{1h} u_h^{n+1/2} + A_{2h} u_h^n = f_h^{n+1} \\ \frac{u_h^{n+1} - u_h^{n+1/2}}{h} + A_{1h} u_h^{n+1/2} + A_{2h} u_h^{n+1} = f_h^{n+1} \end{cases}$$

a une solution unique, qui vérifie l'équation

$$(3.12) \quad \frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{k} + A_{2h} u_h^{n+1} + A_{1h} [u_h^{n+1} + k(A_{2h} u_h^{n+1} - A_{2h} u_h^n)] = f_h^{n+1}$$

Proposition 3.4

La solution de (3.11) satisfait l'égalité d'énergie suivante (où, pour alléger l'écriture, on n'écrit pas les indices h)

$$(3.13) \quad \begin{cases} \frac{1}{2k} \{ |u_{n+1}|^2 - |u_n|^2 + |u_{n+1} - u_n|^2 \} + \frac{k}{2} \{ |A_2 u_{n+1}|^2 - \\ - |A_2 u_n|^2 + |A_2 u_{n+1} - A_2 u_n|^2 \} + \text{Re} (A_2 u_{n+1} - A_2 u_n, u_{n+1} - u_n) \\ + \text{Re} (A_2 u_{n+1}, u_{n+1}) + \text{Re} (A_1 u_{n+1/2}, u_{n+1/2}) = \\ = \text{Re} (f_{n+1}, u_{n+1/2}) \end{cases}$$

Démonstration : il suffit de faire le produit scalaire de (3.12) et de l'argument $u_{n+1/2}$ de A_1 .

Majoration a priori

Il est visible, sur (3.13), que nous aurons à majorer le terme $|k A_{2h} u_h^0|$; nous serons donc conduits à faire l'hypothèse (cf.(3.9))

$$(3.14) \quad k \sigma_2 (h)^{p_2} \leq \text{constante.}$$

Il faut aussi majorer le terme $(f_{n+1}, u_{n+1/2})$;

f peut être décomposée en somme de trois fonctions de $L_2(0, T \rightarrow H)$, $L_{p_1}(0, T \rightarrow V_1')$ et $L_{p_2}(0, T \rightarrow V_2')$ et f_n se décompose en conséquence.

On majore la partie de $L_2(0, T \rightarrow H)$ par

$$(3.15) \quad |(f_n, u_{n-1/2})| \leq |f_n|^2 + \frac{1}{2} |u_n|^2 + \frac{k^2}{2} |A_2 u_n - A_2 u_{n-1}|^2$$

et la partie de $L_{p_1}(0, T \rightarrow V_1')$ par

$$(3.16) \quad |(f_n, u_{n-1/2})| \leq \frac{1}{\delta p_1} \|f_n\|_{*1}^{p_1'} + \frac{\delta}{p_1} \|u_{n-1/2}\|_1^{p_1}$$

(δ positif assez petit) ; enfin, pour la partie dans $L_{p_2}(0, T \rightarrow V_2')$, dans l'inégalité

$$(3.17) \quad \left[|(f_n, u_{n-1/2})| \leq \frac{1}{\delta p_2} \|f_n\|_{*2}^{p_2'} + \frac{\delta}{p_2} \|u_n\|_2^{p_2} + \right. \\ \left. + \frac{\delta k}{2} |A_2 u_n - A_2 u_{n-1}|^2 + \frac{k}{2\sigma} |f_n|^2 \right]$$

seuls les derniers termes sont gênant. Il faut montrer que

$$(3.18) \quad k^2 \sum_{nk \leq T} |f_n|^2 \leq C^{st};$$

remarquons que

$$(3.19) \quad |f_n| \leq \sigma_2 \|f_n\|_{*2},$$

.../...

de sorte qu'il suffit de montrer que

$$(3.20) \quad k \sigma_2^2 \|f_n\|_{*2}^{2-p'_2} \leq C^{st}.$$

Or

$$(3.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|f_n\|_{*2} \leq \frac{1}{k} k^{1/p_2} \left(\int_{(n-1)k}^{nk} \|f(t)\|_{*2}^{p'_2} dt \right)^{1/p'_2} \\ \leq C^{st} k^{-1/p'_2} \end{array} \right.$$

montre que (3.20) résulte de

$$(3.22) \quad k \sigma_2^2 k^{-(2-p'_2)/p'_2} \leq C^{st}$$

qui est équivalent à (3.14).

A l'aide des majorations précédentes, il est facile de montrer, en sommant les équations (3.13),

Proposition 3.5

Sous la condition (3.14), le schéma des directions alternées est stable :

$$(3.23) \quad |u_N|^2 + k \sum_{n \leq N} \|u_n\|_2^{p_2} + k \sum_{n \leq N} \|u_{n-1/2}\|_1^{p_1} \leq C^{st}.$$

(indépendante de h, pour Nk borné).

Convergence

Définissons les fonctions $u_h(t)$ et $\hat{u}_h(t)$ par

$$(3.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_h(t) = u_h^n \quad \text{pour } (n-1)k < t \leq nk \\ \hat{u}_h(t) = u_h^{n-1/2} \quad " \quad " \quad ; \end{array} \right.$$

de la proposition 3,5 résulte que u_h est bornée dans $L_\infty(0, T \rightarrow H)$ et $L_{p_2}(0, T \rightarrow V_2)$ et que $\hat{u}_h$ est bornée dans $L_{p_1}(0, T \rightarrow V_1)$. D'après les hypothèses faites, on peut extraire de la suite des h une suite (notée abusivement de

la même manière) telle que

$$(3.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_h(T) \rightarrow \theta \text{ dans } H \text{ faible,} \\ u_h \rightarrow \tilde{u} \text{ dans } L_{p_2}(0, T \rightarrow V_2) \text{ faible et } L_\infty(0, T \rightarrow H) * \text{ faible} \\ A_2 u_h \rightarrow \chi \text{ dans } L_{p_2'}(0, T \rightarrow V_2') \text{ faible,} \\ \hat{u}_h \rightarrow \hat{u} \text{ dans } L_{p_1}(0, T \rightarrow V_1) \text{ faible,} \\ A_1 \hat{u}_h \rightarrow \eta \text{ dans } L_{p_1'}(0, T \rightarrow V_1') \text{ faible,} \end{array} \right.$$

Il est facile de voir que $\hat{u} = \tilde{u}$: en effet si $v \in V_1 \cap V_2$ et $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$

$$(3.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T (\hat{u}_h(t), v) \varphi(t) dt = \int_0^T (u_h(t), v) \varphi(t) dt + \\ \quad + \int_0^T (A_2 u_h(t) - A_2 u_h(t-k), v) \varphi(t) dt \end{array} \right.$$

converge, d'après (3.25) vers

$$(3.27) \quad \int_0^T (\tilde{u}(t), v) \varphi(t) dt = \int_0^T (\hat{u}(t), v) \varphi(t) dt.$$

Prenons v dans $V_1 \cap V_2$, φ dans $\mathcal{D}[0, T]$ et faisons le produit scalaire de (3.12) et de $(q_h v) \varphi(t)$ pour obtenir par sommation $((N-1)k < T \leq Nk)$

$$(3.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u_h(T), q_h v) \varphi(Nk) - (u_h^0, q_h v) \varphi(0) - \int_0^{Nk} (u_h(t), q_h v) \nabla_k \varphi(t) dt + \\ \quad + \int_0^{Nk} (A_2 u_h(t), q_h v) \varphi(t) dt + \\ \quad + \int_0^{Nk} (A_1 \hat{u}_h(t), q_h v) \varphi(t) dt = \int_0^{Nk} (f(t), q_h v) \varphi_k(t) dt \end{array} \right.$$

où $\nabla_k \varphi$ et φ_k (expressions faciles à expliciter) convergent vers φ' et φ . Par passage à la limite, à l'aide de (3.25), on obtient

$$(3.29) \quad (\theta, v) \varphi(T) - (u_0, v) \varphi(0) - \int_0^T (u(t), v) \varphi'(t) dt +$$

.../...

$$+ \int_0^T (\chi + \eta, v) \varphi(t) dt = \int_0^T (f(t), v) \varphi(t) dt$$

ce qui montre

Proposition 3.6

Les limites de (3.25) vérifient les relations

$$\begin{cases} \tilde{u} \in F, \quad \frac{d\tilde{u}}{dt} \in F' \\ \tilde{u}(0) = u_0, \quad \tilde{u}(T) = 0 \\ \frac{d\tilde{u}}{dt} + \chi + \eta = f \end{cases}$$

Pour montrer que $\chi + \eta = (A_1 + A_2) \tilde{u}$, considérons l'expression

$$(3.31) \quad \operatorname{Re} \int_0^T (A_1 \hat{u}_h(t) + A_2 u_h(t) - [A_1 + A_2] v(t), \hat{u}_h(t) - v(t)) dt$$

où v est quelconque dans F . (3.31) se décompose en

$$(3.32) \quad \begin{cases} \operatorname{Re} \int_0^T (A_1 \hat{u}_h(t) - A_1 v(t), \hat{u}_h(t) - v(t)) dt + \operatorname{Re} \int_0^T (A_2 u_h(t) - A_2 v(t), u_h(t) - v(t)) dt + \\ + \operatorname{Re} k \int_0^T (A_2 u_h(t), A_{2h} u_h(t) - A_{2h} u_h(t-k)) dt - \\ \operatorname{Re} k \int_0^T (A_2 v(t), A_{2h} u_h(t) - A_{2h} u_h(t-k)) dt. \end{cases}$$

Les deux premiers termes de (3.32) sont non négatifs; le troisième est au moins égal à $-\frac{1}{2} |k A_{2h} u_h^0|^2$. Montrons que

le dernier terme tend vers zéro avec h ; pour cela, il suffit de montrer que $k A_{2h} u_h$ est borné dans $L_{p_2}(0, T; V_2)$.

De la relation

$$(3.33) \quad \begin{cases} |A_{2h} u_h|^2 = (A_2 u_h, A_{2h} u_h) \leq \|A_2 u_h\|_{*2} \|A_{2h} u_h\|_2 \leq \\ \leq c^{st} \|u_h\|_2^{p_2/p_1'2} \sigma_2 |A_{2h} u_h| \end{cases}$$

on déduit

.../...

$$(3.34) \quad \|k A_{2h} u_h\|_2 \leq k \sigma_2 \|A_{2h} u_h\| \leq C^{st} k \sigma_2^2 \|u_h\|^{p_2/p'_2};$$

il suffit alors de montrer que

$$(3.35) \quad k \sigma_2^2 \|u_h\|^{p_2/p'_2 - 1} \leq C^{st}.$$

ce qui résulte de la stabilité dans $L^\infty(0, T; H)$ et de la majoration

$$(3.36) \quad k \sigma_2^2 \sigma_2^{p_2/p'_2 - 1} \leq C^{st}$$

qui est identique à (3.14).

Montrons maintenant

Proposition 3.7

Sous la condition (3.14),

$$k A_{2h} u_h^0 \rightarrow 0 \text{ dans } H \text{ fort.}$$

Démonstration : tout d'abord u_h^0 est borné dans H (Prop. 3.1) et $k A_{2h} u_h^0$ est borné dans H (Prop. 3.2); soit $v \in V_1 \cap V_2$,

$$(3.37) \quad \left[\begin{aligned} |(k A_{2h} u_h^0, q_h v)| &\leq k \|u_h^0\|_2^{p_2/p'_2} \|q_h v\|_2 \leq \\ &\leq k \sigma_2^{p_2/p'_2} \|u_h^0\|_2^{p_2/p'_2} \|q_h v\|_2 \end{aligned} \right]$$

ainsi $k A_{2h} u_h^0$ tend vers zéro dans H faible. Considérons alors

$$(3.38) \quad k(A_{2h} u_h^0, u_h^0) = k(A_{2h} u_h^0, u_h^0) \geq \alpha k \|u_h^0\|_2^{p_2} \rightarrow 0.$$

La majoration

$$(3.39) \quad |k A_{2h} u_h^0| \leq C^{st} k \sigma_2 \|u_h^0\|_2^{p_2/p'_2}$$

montre alors la proposition.

Nous avons ainsi montré que l'expression (3.31) a une limite inférieure non négative. Transformons maintenant (3.31); de (3.12) vient

Remarque 3.1

La condition $P_2 \geq 2$ intervient en (3.20) - (3.22) et (3.25) - (3.26). La condition $p_1 \geq 2$ n'intervient pas et $\sigma_1(h)$ non plus.

Remarque 3.2

Il est évident qu'en (3.44) on aurait pu écrire
(3.46) $u_h(t) \rightarrow u(t)$ dans H faible, $\forall t \in (0, T)$.
On démontre facilement, en utilisant (3.4) et (3.13) et des résultats précédents (Prop. 3.1, Prop. 3.7, Th. 3.2, non-négativité de la limite inférieure de (3.31)) le résultat suivant

Proposition 3.8

Avec les hypothèses et notations du théorème 3.2,

$$(3.47) \quad u_h(t) \rightarrow u(t) \text{ dans } H \text{ fort, } \forall t \in (0, T),$$

$$(3.48) \quad \mathbb{E} \int_0^T (A_1 \hat{u}_h(t) + A_2 u_h(t) - [A_1 + A_2]u(t), \hat{u}_h(t) - u(t)) dt \rightarrow 0,$$

$$(3.49) \quad k A_2 u_h(t) \rightarrow 0 \text{ dans } H \text{ fort, } \forall t \in (0, T).$$

Remarque 3.3

Moyennant des hypothèses supplémentaires sur les espaces V (uniforme convexité) et sur les opérateurs A , on pourrait obtenir d'autres résultats de convergence forte (cf. BREZIS - SIBONY [17], TEMAM [8]).

Remarque 3.4

Les hypothèses faites sur les q_h de ce paragraphe correspondent à une approximation "interne" alors que, dans les chapitres précédents, nous opérons avec les hypothèses

d'une approximation "externe" (cf. CEA [1]). De tels q_h peuvent être obtenus directement à l'aide d'opérateurs de restriction prolongement P_h et r_h (cf. AUBIN [18]).

Exemple 3.1.

Indiquons, sans entrer dans les détails de la construction des q_h , le genre de condition

$$(3.50) \quad k \sigma(h)^p \leq C^{ste}.$$

que l'on obtient dans quelques exemples.

Si $H = L_2(\Omega)$, $V = L_p(\Omega)$, ($p \geq 2$), Ω ouvert borné de R^m , l'inégalité

$$(3.51) \quad \left(\sum_1^p a_i^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_1^2 a_i^2 \right)^{1/2} \quad (a_i \geq 0)$$

montre que l'on peut prendre (dans le cas d'un maillage carré de pas h)

$$(3.52) \quad \sigma(h) = k^{m - (\frac{1}{p} - \frac{1}{2})};$$

ainsi la condition (3.50) s'écrit ici

$$(3.53) \quad k \leq C^{st} \cdot h^{m(p/2-1)}.$$

Par exemple si l'on traite un problème du type

$$(3.54) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + |u|^{p-2} u = f$$

par la méthode des directions alternées ($A_2 u = |u|^{p-2} u$), on devra satisfaire la condition de stabilité

$$(3.55) \quad k \leq C^{st} \cdot h^{p/2-1}$$

Exemple 3.2

Si maintenant V est l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, alors

$$(3.55) \quad \sigma(h) \leq C^{st} \cdot h^{m(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) - 1}$$

et la condition (3.50) donne ici

$$(3.56) \quad k \leq Cst. \quad h^m \left(\frac{p}{2} - 1 \right) + p.$$

Par exemple, pour un problème du type

$$(3.57) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^{q-2} \frac{\partial u}{\partial x} \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} = f$$

$$(A_2 u = - \frac{\partial}{\partial y} \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial y}), \text{ on devra satisfaire la condition}$$

de stabilité

$$(3.58) \quad k \leq C^{st.} \cdot h^{2(p-1)}$$

Remarque 3.5

La résolution des équations (3.11), définissant la solution approchée, n'est nullement triviale et exige (en général) un procédé itératif ; elle est cependant plus facile que celle du schéma implicite standard

$$\frac{1}{k} [u_{n+1} - u_n] + (A_1 + A_2) u_{n+1} = f.$$

Remarque 3.6

On peut aussi définir une forme "directions alternées" du schéma de Crank-Nicolson; par exemple

$$(3.59) \quad \frac{1}{k} [u_{n+1} - u_n] + A_2 \frac{u_{n+1} + u_n}{2} + A_1 \left[\frac{u_{n+1} + u_n}{2} + \frac{k}{2} A_2 \frac{u_{n+1} + u_n}{2} - \frac{k}{2} A_2 u_n \right] = f_{n+1}$$

L'intérêt du schéma (3.59) est d'avoir (lorsque toutes les données et solution sont régulières) un ordre d'approximation en t en $O(k^2)$.

B I B L I O G R A P H I E

- [1] CEA - Approximation Variationnelle des problèmes aux limites.
Ann. Inst. Fourier, 14,2(1964) 345-444
- [2] RAVIART - Sur l'application de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires.
Journal Math. Pures et Appliquées, 46,1(1967)
- [3] LIONS - Equations Différentielles Opérationnelles
Springer Verlag - Berlin (1961)
- [4] RICHTMYER - Difference Methods for Initial Value Problems
Interscience - New-York (1957)
- [5] WILKINSON - The Algebraic Eigenvalue Problem
Charendon - Press - Oxford (1965)
- [6] DOUGLAS-GUNN - General Formulation of Alternating Direction Methods
Numer - Math. 6 (1964) 428-453
- [7] YANENKO - Méthode des Pas Fractionnaires
(Trad. française à paraître chez A. COLIN)
- [8] TEMAM - Sur la stabilité et la convergence de la méthode des pas fractionnaires
Annali di Mat. (1968)
- [9] HUBBARD - Some locally one dimensional schemes for parabolic equations in arbitrary regions
Math. Comp. 20 (1966) 53-59
- [10] SAMARSKII - Economical Difference Schemes for Parabolic Equations with Mixed derivatives
U.S.S.R. Comput. Math. & Math. Phys. 4,4(1964) 182-198.
- [11] BIRKHOFF-VARGA - Implicit Alternating Direction Methods
Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 92 (1959) p. 13-24
- [12] KONOVALOV - Fractional Step Method for Solving Cauchy Problem for n-dimensional Oscillation Equation
Soviet Mathematics 3,6 (1962)
- [13] SAMARSKII - Local One-dimensional Difference Schemes for Multidimensional Hyperbolic Equations in an Arbitrary Region
U.S.S.R. Comput. Math. & Math. Phys. 4,4(1964) 21-35.

- [14] LIONS-STRAUSS - Some Non linear Evolution Equations
Bull.Soc.Math.France 93 (1965) 43-96
- [15] PEARCY - On Convergence of Alternating Direction
Procedures
Numer.Math. 4 (1962) 172-176
- [16] LIONS - Approximation de quelques problèmes non
linéaires
Ecole d'été C.E.A.-E.D.F. (1965)
- [17] BREZIS-SIBONY - Méthodes d'approximation et d'itération
pour les opérateurs monotones.
Fac-Sciences de Rennes (1967)
- [18] AUBIN - Approximation des espaces de distributions
et des opérateurs différentiels - (1966)
Mémoires de Soc. Math. de France.

DEUXIEME THESE

Propositions données par la Faculté

Vu et approuvé

Paris, le 25 Avril 1969

Le Doyen de la Faculté des Sciences
de paris

Marc. ZAMANSKY

Vu
et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Paris

Jean ROCHE

